



# Modélisation, analyse et simulations numériques de quelques problèmes de contact

David Danan

## ► To cite this version:

David Danan. Modélisation, analyse et simulations numériques de quelques problèmes de contact. Modélisation et simulation. Université de Perpignan, 2016. Français. NNT : 2016PERP0015 . tel-01362299

**HAL Id: tel-01362299**

**<https://theses.hal.science/tel-01362299>**

Submitted on 8 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Pour obtenir le grade de  
**Docteur**

Délivré par  
**UNIVERSITE DE PERPIGNAN VIA DOMITIA**

Préparée au sein de l'école doctorale ED305  
Et de l'unité de recherche LAMPS

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Présentée par **David DANAN**

**Modélisation, analyse et simulations numériques  
de quelques problèmes de contact**

Soutenue le 08 juillet 2016 devant le jury composé de

M. Stéphane Abide, MCF, Université de Perpignan  
M. Pierre Alart, PR, Université Montpellier II  
M. Mikaël Barboteu, PR, Université de Perpignan  
M. Serge Dumont, PR, Université de Nîmes  
M. Frédéric Lebon, PR, Université d'Aix-Marseille  
M. Yves Renard, PR, INSA de Lyon  
M. Mircea Sofonea, PR, Université de Perpignan

Directeur  
Examineur  
Directeur  
Examineur  
Rapporteur  
Rapporteur  
Directeur



Modélisation, analyse et simulations  
numériques de quelques problèmes de  
contact





# Remerciements

Ce manuscrit est le fruit de trois années de travail de thèse au sein du Laboratoire de Mathématiques et de Physique, le LAMPS. Je voudrais ici témoigner ma gratitude à tous ceux qui y ont contribué.

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Stéphane Abide, Mikaël Barboteu et Mircea Sofonea, qui m'ont beaucoup apporté à la fois sur le plan technique et sur le plan humain. Je les remercie également pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral. Je tiens enfin à souligner à quel point j'ai apprécié leur grande disponibilité malgré leurs nombreuses responsabilités, leurs qualités humaines d'écoute et de compréhension, leur gentillesse ainsi que les conseils avisés qu'ils m'ont prodigués tout au long de ces trois dernières années. Je remercie du fond du coeur Mircea pour la pédagogie dont il a fait preuve pour m'initier aux aspects mathématiques qui me faisaient défaut et m'avoir fait bénéficier de son expérience. J'exprime ma profonde reconnaissance envers Mikaël, auprès de qui j'ai toujours trouvé une oreille attentive si le besoin s'en faisait sentir, pour sa patience et son implication dans l'ensemble de mes travaux. Je remercie chaleureusement Stéphane pour sa prévenance à mon égard, sa convivialité et pour m'avoir véritablement insufflé le goût du numérique.

Le bon déroulement de ma thèse, je le dois en très grande partie aux secrétaires du LAMPS, Joëlle Sulian et Sylvia Munoz, sans qui rien n'aurait pu se faire et que je ne saurais trop remercier. Elles ont toujours été là pour me guider dans les méandres des démarches administratives auprès de l'université, de l'école doctorale, à l'occasion des missions, des voyages ou encore des conférences. Je remercie également l'ensemble des membres du laboratoire, dont j'ai pu apprécier l'expertise dans les domaines qui les occupent ainsi que leur bienveillance. Le temps passé dans cette structure m'a permis de réaliser que le LAMPS est, plus qu'un laboratoire, une famille soudée dont j'ai fait partie.

Je remercie ensuite mes collègues doctorants (Nasrine Damouche, Nacéra Djehaf, Yahyeh Souleiman et Alexis Wery) et docteurs (Flavius Patrulescu, Ahmad Ramadan) pour les bons moments que nous avons passés ensemble. Je n'oublie pas non

plus les nombreux chercheurs, professeurs, étudiants que j'ai rencontrés lors de mes séjours dans d'autres villes de France et à l'étranger, tout autant de rencontres et de collaborations qui m'ont permis de m'épanouir et d'en arriver là où je suis.

Mon doctorat s'est achevé le 08 Juillet 2016 par une soutenance devant un jury composé d'éminents chercheurs qui m'ont fait honneur par leur présence. A ce titre, je remercie vivement les deux rapporteurs, Yves Renard et Frédéric Lebon, pour avoir accepté de se consacrer à la relecture de mon travail malgré des délais très courts, pour leurs retours élogieux et leurs critiques constructives, Serge Dumont, pour la pertinence de ses questions lors de ma présentation et pour l'intérêt dont il a fait preuve à l'égard de mes recherches, et Pierre Alart, jadis mon professeur de Master à l'Université Montpellier 2 et le premier à m'avoir suggéré de poursuivre en thèse, pour la finesse de ses remarques et l'attention toute particulière qu'il a porté à mon travail.

Je souhaiterai ensuite remercier ma famille et mes amis, trop nombreux pour tous les citer mais ils se reconnaîtront, pour leur soutien tout au long de ces trois années et l'intérêt qu'ils ont porté à mon sujet.

Pour finir, je remercie ma mère, pour son soutien inconditionnel et ses conseils avisés concernant la mise en forme des slides de la soutenance, mon père, pour avoir joué le rôle de relecteur du document final, et ma soeur, avocate de son état, pour avoir essayé de comprendre ce sur quoi je travaillais malgré son aversion manifeste pour les Mathématiques.

Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement,  
Et les mots pour le dire arrivent aisément  
Boileau



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Notation</b>	<b>11</b>
<b>I Préliminaires</b>	<b>15</b>
<b>1 Modélisation</b>	<b>19</b>
1.1 Cadre physique . . . . .	19
1.2 Lois de comportement. . . . .	22
1.3 Conditions de contact . . . . .	28
1.4 Lois de frottement. . . . .	35
1.5 Formalisme de l'hyperélasticité. . . . .	40
<b>2 Analyse fonctionnelle</b>	<b>51</b>
2.1 Espaces fonctionnels. . . . .	51
2.2 Analyse non linéaire. . . . .	55
<b>3 Méthodes numériques</b>	<b>65</b>
3.1 Méthode du quasi-Lagrangien augmenté . . . . .	65
3.2 Méthodes de type "Active set" . . . . .	71
3.3 Méthodes de type conservation de l'énergie . . . . .	75
<b>II Analyse mathématique de quelques problèmes de contact</b>	<b>85</b>
<b>4 Problème statique de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale</b>	<b>89</b>
4.1 Modèle . . . . .	90

4.2	Existence et unicité . . . . .	93
4.3	Formulation duale . . . . .	96
4.4	Un résultat de convergence . . . . .	107
4.5	Approximation numérique . . . . .	110
4.6	Simulations numériques . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Problème viscoélastique de contact avec contraintes unilatérales et réponse normale instantanée</b>	<b>125</b>
5.1	Modèle . . . . .	126
5.2	Existence et unicité . . . . .	129
5.3	Un résultat de convergence . . . . .	132
5.4	Approximation numérique . . . . .	137
5.5	Simulations numériques . . . . .	144
<b>6</b>	<b>Problème viscoélastodynamique de contact avec compliance nor- male et frottement non monotone</b>	<b>157</b>
6.1	Problème mécanique et formulation variationnelle . . . . .	158
6.2	Approximation spatiale et estimation de l'erreur . . . . .	164
6.3	Approximations spatiale et temporelle, estimation de l'erreur . . . .	171
6.4	Simulations numériques . . . . .	177
<b>III</b>	<b>Modélisation numérique de quelques problèmes de contact en hyperélasticité</b>	<b>183</b>
<b>7</b>	<b>Une méthode de projection de type active set pour un problème statique avec contrainte unilatérale</b>	<b>187</b>
7.1	Problème mécanique et formulation variationnelle . . . . .	188
7.2	Approximation variationnelle et schémas numériques . . . . .	190
7.3	Analyse de convergence de la méthode de projection. . . . .	193
7.4	Simulations numériques . . . . .	197
7.5	Conclusion . . . . .	212
<b>8</b>	<b>Conservation de l'énergie pour un problème de contact hyperélastique</b>	<b>215</b>
8.1	Un modèle spécifique de contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et frottement . . . . .	216

8.2	Problème mécanique et formulation variationnelle . . . . .	217
8.3	Discretisation et approximation variationnelle . . . . .	220
8.4	Une méthode de type conservation de l'énergie . . . . .	223
8.5	Simulations numériques . . . . .	226
<b>Conclusion</b>		<b>235</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>238</b>





# Introduction

Les phénomènes de contact entre les corps, déformables ou non, restent encore à ce jour omniprésents dans la vie courante. On peut considérer qu'il s'agit d'un des fondements de l'ingénierie mécanique, avec un domaine d'application particulièrement étendu. A titre d'exemple, on peut citer le secteur ferroviaire, avec le contact roue-rail, l'industrie automobile, via l'étude des caractéristiques d'adhérence entre le pneu et la chaussée ainsi que les crash tests, le génie civil, pour lequel il est nécessaire d'estimer les efforts que vont subir les matériaux qui constituent les ponts ou gratte-ciels, le frottement inhérent au mouvement des plaques tectoniques ou encore le domaine de l'aéronautique, ne serait ce que pour les propriétés d'absorption des chocs dont sont dotés les amortisseurs des trains d'atterrissage d'avion. La modélisation de tels phénomènes n'est pas sans poser quelques difficultés d'un point de vue mathématique. En effet, leur représentation fait appel à des systèmes d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites pouvant être relativement difficiles à établir, en fonction de la complexité du problème considéré. Le cadre d'étude de ce manuscrit se trouve à la jonction entre deux domaines, à savoir les mathématiques appliquées et la mécanique. La transversalité d'une telle combinaison revêt plusieurs aspects qui se manifestent dans un premier temps par la modélisation mathématique et numérique de problèmes de mécanique non linéaire, en l'occurrence le contact frottant de processus potentiellement évolutifs associé à des lois de comportement de certains matériaux. Les considérations mathématiques prennent ensuite le pas sur la mécanique au travers de l'approximation et analyse variationnelle, de l'étude de l'existence et unicité de solution au problème, de l'analyse numérique et de la résolution dudit problème, et du calcul scientifique, plus largement. Par ailleurs, bien que l'interprétation des résultats obtenus via une méthode numérique soit principalement mécanique, il est possible de valider certains résultats théoriques au moyen des simulations numériques.

Il est à noter que bien que la théorie mathématique des problèmes de contact soit notamment basée sur les principes de la mécanique des milieux continus, ainsi que

l'analyse variationnelle et numérique des modèles, il s'agit en fait d'un thème d'étude relativement récent.

Des percées significatives ont été effectuées par Coulomb en 1785 dans [49], afin de confirmer et d'étendre les résultats de Amontons formulés en 1699 portant sur les lois de frottement. Ensuite au XIX<sup>ème</sup> siècle, Hertz a été en mesure de résoudre analytiquement un problème impliquant un contact sans frottement entre deux corps élastiques pour des géométries très spécifiques dans [64]. Notons d'ailleurs que ses résultats sont encore utilisés fréquemment dans la littérature comme solution de référence pour apprécier la précision d'une solution obtenue au moyen d'une méthode numérique. Il faudra toutefois attendre les travaux de Signorini [132] en 1933, pour poser les bases d'un problème de contact entre un corps déformable et une fondation rigide, et ceux de son élève Fichera, pour le résoudre dans [54] via la minimisation de l'énergie totale sur un convexe. D'ailleurs, l'utilisation d'inéquations variationnelles pour formuler un problème de contact est de son fait. Partant de là, c'est à Duvaut et Lions que l'on doit l'établissement d'une théorie mathématique de la mécanique du contact dans [52]; ils y ont introduit quelques formulations variationnelles ainsi que des résultats d'existence et d'unicité. Bien entendu, cela ne s'arrête pas là; de nombreux travaux portant sur la résolution et l'analyse numérique de problèmes variationnels issus de la mécanique du contact ont suivi. Citons à ce titre les contributions de Hlaváček et al. [70], ceux de Moreau [103] ou encore ceux de Kikuchi et Oden [82].

Bien qu'il reste encore à ce jour un nombre considérable de problèmes à explorer, un tel développement passe nécessairement par l'élaboration de nouveaux modèles de contact et de frottement. Nous nous proposons de passer en revue quelques unes des lois de contact abordées dans ce manuscrit. Dans la littérature la loi de Signorini, qui décrit le contact entre un solide déformable et une fondation parfaitement rigide, reste encore aujourd'hui l'une des lois les plus utilisées. Elle n'en reste pas moins une idéalisation de la réalité dans la mesure où elle ne prend pas en compte les irrégularités inhérentes aux surfaces de contact telles que les microaspérités, et cela quelles que soient les forces appliquées. C'est la raison pour laquelle les conditions de contact unilatéral qui la caractérisent peuvent être remplacées par une approximation faisant intervenir une pénalisation appelée compliance normale, introduite pour la première fois dans [111]. La fondation, ou tout du moins sa surface, est alors considérée comme déformable, rendant par la même occasion le problème ainsi obtenu plus simple à étudier. Une fois l'existence et l'unicité de la solution du problème approché établies au moyen de résultats abstraits issus de la théorie des inéquations variationnelles

ou une méthode du point fixe, pour ne citer qu'elles, la difficulté réside alors dans le passage à la limite. En effet, procéder de la sorte implique que la rigidité de la fondation est destinée à tendre vers l'infini, en considérant ainsi une fondation parfaite d'un point de vue mécanique, permettant de s'approcher de la solution du problème d'origine (cf [21, 40]). Néanmoins, là encore, la loi de compliance normale a ses limites... Inhérentes au fait que la pénétration n'en a justement pas. L'existence d'une fondation dans laquelle la pénétration ne serait pas limitée reste assez discutable d'un point de vue physique. Pour y remédier, une idée possible consiste à combiner les deux lois mentionnées plus haut afin d'obtenir la loi de compliance normale avec contrainte unilatérale, introduite dans [76], pour laquelle la fondation peut être vue comme une base constituée d'un matériau rigide où repose une couche d'aspérités déformables. Pour les cas évolutifs, la difficulté du point de vue de l'analyse mathématique est accrue du fait de la nature hyperbolique des problèmes élastodynamiques à laquelle s'ajoute les contraintes exprimées en déplacement provenant du contact. De ce fait, certains auteurs (cf [104]) ont choisi de remplacer la contrainte en déplacement par une contrainte en vitesse, ce qui simplifie considérablement l'étude mathématique du problème. Ainsi, la combinaison de la loi de réponse normale instantanée, utilisée dans [56], avec la loi de Signorini en vitesse n'est rien d'autre que la réécriture de la loi précédente en vitesse. La condition aux limites ne porte alors plus sur le déplacement normal sur la frontière de contact mais sur la vitesse normale. Tant que la vitesse normale est inférieure à la vitesse limite fixée par la loi de Signorini, la réaction de la fondation est assimilable à celle d'un piston et, dans ce cas précis, il serait plus juste de parler de couche de lubrification, en lieu et place de la couche d'aspérités. Une fois la vitesse limite atteinte, le contact est alors régi par la loi de Signorini en vitesse.

Cela va sans dire, une modélisation pertinente du phénomène de contact est difficilement concevable sans tenir compte du phénomène de frottement, avec pour inconvénient de complexifier encore d'avantage le problème, à la fois d'un point de vue mécanique, mathématique et numérique. Bien que le cas sans frottement ait été entièrement traité dans [54], il faudra attendre quelques années de plus pour qu'il en soit de même dans un problème faisant intervenir une loi de frottement (cf [50]). Rappelons à toutes fins utiles que le frottement de Coulomb reste, à ce jour, l'une des lois les plus utilisées dans la littérature; il n'y a pas de raison qu'il en soit autrement dans ce qui va suivre. Une telle loi présente deux caractéristiques notables : la notion de seuil de frottement et un couplage avec la contrainte normale, par opposition à la loi de Tresca pour laquelle le seuil est supposé constant. Le problème de

Signorini avec frottement a été résolu mathématiquement dans [110, 113], sous l'hypothèse que le coefficient de frottement était suffisamment petit. C'est d'ailleurs une difficulté récurrente dans l'étude mathématique des problèmes de contact ; la question de savoir s'il s'agit d'une limitation inhérente aux outils mathématiques utilisés ou s'il s'agit d'une caractéristique intrinsèque à la mécanique du problème, en fonction des problèmes étudiés, reste ouverte. Néanmoins, il a été montré qu'un coefficient de frottement trop important pouvait conduire non seulement à la perte de l'unicité de la solution (cf [10, 66, 67]) mais également à celle de l'existence de la solution (cf [83, 98]). Par ailleurs, bien qu'une telle loi soit couramment utilisée, elle reste insuffisante pour rendre compte de l'influence de la microstructure de la surface de contact dans la mesure où le coefficient de frottement  $\gamma$  est considéré constant. Des études ont montré que les grandeurs physiques telles que la température (cf [115, 116]), ou encore la norme de la vitesse tangentielle (cf [129]) pouvaient avoir une influence non négligeable sur le coefficient de frottement ; une telle dépendance peut être également source de non-unicité [124]. De plus, il existe deux valeurs caractéristiques pour le frottement : un coefficient de frottement statique, représentant le rapport entre le module de la contrainte tangentielle normale en dessous duquel il n'y a pas de glissement, et un coefficient de frottement dynamique représentant la valeur de ce rapport lorsque le glissement a lieu lors du mouvement effectif. Typiquement, le coefficient de frottement dynamique est plus faible que le coefficient de frottement statique, reflétant ainsi l'idée selon laquelle il est plus simple de maintenir un objet en statut de glissement en mouvement que de faire glisser un objet au repos. Un tel phénomène a été étudié dans [114] dans le contexte géophysique des tremblements de terre. À cet égard, nous pouvons nous référer à [19, 36, 100, 124, 131], dans lesquels interviennent des coefficients de frottement variables. Il convient également de préciser que de tels problèmes ne peuvent être traités avec les outils standards de l'analyse convexe et de programmation quadratique. En effet, une loi de frottement non monotone a pour conséquence de rendre les problèmes non convexes, obligeant l'utilisation d'outils nouveaux relevant de l'analyse non lisse et non linéaire. Un traitement numérique possible pour ce genre de problèmes consiste à se ramener à une suite de problèmes convexes, chacun étant résolu avec les outils standards. Pour plus de détails sur le sujet, le lecteur pourra se référer à [101, 102, 125]. À ce stade, nous attirons l'attention sur le fait que nous n'avons évoqué ici qu'un échantillon des lois de contact existantes, utilisées par la suite dans le manuscrit ; d'autres lois modélisant le contact à l'interface, ainsi que le comportement des matériaux, figurent dans [5, 91, 118, 136, 143].

Comme nous l'avons déjà évoqué jusqu'à présent, les problèmes issus de la mécanique du contact sont, le plus souvent, trop complexes pour être traités analytiquement en dimension supérieure à 1. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'avoir recours à des approches numériques. Parmi les méthodes possibles, et en raison de sa proximité avec la mécanique du solide, la méthode des éléments finis est, et reste encore aujourd'hui, l'une des plus largement utilisées pour discrétiser la géométrie du corps en un ensemble d'éléments dont la taille est finie. Les pionniers dans ce domaine ont travaillé dans un premier temps sur des problèmes élastiques sans frottement, voir [6, 37, 47, 73, 88, 142], suivis quelques années plus tard par des problèmes avec frottement, comme dans [105, 106, 120, 128]. Toutefois, le caractère non linéaire et non régulier d'un problème mathématique avec du contact et du frottement, surtout dans le cas de processus d'évolution (dynamique), n'est pas sans poser quelques difficultés d'un point de vue numérique, raison pour laquelle il est nécessaire de développer des méthodes suffisamment robustes, précises et stables afin de les surmonter.

Sans être exhaustif, on se propose à présent de passer en revue quelques unes des grandes familles de méthodes utilisées en mécanique du contact. Les deux méthodes que l'on rencontre le plus fréquemment pour traiter les conditions de contact et de frottement sont la méthode du quasi-Lagrangien augmenté [6, 88, 143] et la méthode de pénalisation [143], cette dernière pouvant d'ailleurs être vue comme un cas particulier du Lagrangien augmenté et est notamment en relation directe avec la condition de compliance normale. Les systèmes non linéaires qui découlent de ces techniques sont, dans la plupart des cas, résolus par une méthode de Newton. En effet, à ce jour, la méthode de Newton généralisée [4, 7, 123] reste très largement utilisée en mécanique du contact, en particulier pour sa capacité à traiter les non linéarités en une seule itération (hyperélasticité, plasticité, contact, frottement) ainsi que pour sa vitesse de convergence quadratique au voisinage de la solution. Alart et Curnier ont présenté dans [6] une formulation basée sur une méthode de Lagrangien augmenté combinée à une méthode de Newton généralisée afin de résoudre des équations continues mais non différentiables issues de problèmes de contact avec frottement. En considérant ce même Lagrangien, Simo et Laursen ont proposé une méthode [130] combinant l'algorithme d'Uzawa, pour la contrainte de contact, et la méthode de Newton généralisée pour le déplacement, optimisant ainsi l'algorithme d'Uzawa. Il est à noter que les systèmes linéaires issus des problèmes de contact sont connus pour être, d'une part, particulièrement mal conditionnés et, d'autre part, augmentés en partie à cause des multiplicateurs de Lagrange. Ce sont notamment les deux principales raisons pour lesquelles certains

auteurs ont cherché à mettre en oeuvre des méthodes n'y ayant pas recours. A ce titre, nous pouvons citer la méthode de Nitsche [38, 39, 41, 42] ainsi que la stratégie de type "active set" [68, 69, 71, 72], pour laquelle il s'agit alors de déterminer l'ensemble des noeuds en contact avec la fondation (ensemble actif) via l'imposition directe de conditions aux limites relativement simples. Il existe encore bien d'autres méthodes dans la littérature : la méthode de relaxations successives avec projection [117], une méthode robuste mais qui peut nécessiter un nombre élevé d'itérations, la méthode de Gauss-Seidel non linéaire [78], également appelée dans ce contexte algorithme d'équilibres successifs, la méthode de gradient conjugué projeté et préconditionné, utilisée en particulier dans [127] dans le cadre des milieux granulaires, des procédures de relaxation [32], pour résoudre des problèmes de contact unilatéraux avec frottement, ou encore la méthode de Lemke [93], méthode de type directe. Il est également possible de citer les techniques de Lagrangien stabilisé qui offrent notamment des propriétés intéressantes du point de vue de la fiabilité et de la robustesse [84, 85]. On pourra aussi se référer à [119, 121], dans lequel figure une présentation de plusieurs méthodes de résolution numérique pour les problèmes de contact, dont une partie de celles suscitées. Précisons que dans le cas des méthodes de Newton généralisées, la question du choix de solveur linéaire et du préconditionneur se pose, compte tenu de la nature non régulière des problèmes de contact et du conditionnement des systèmes linéaires qui en sont issus, après discrétisation. De telles considérations sont abordées dans [8, 9].

Pour autant, d'autres type de difficultés peuvent survenir dans l'étude des problèmes élastodynamiques. Typiquement, la discrétisation de tels problèmes est traitée par la combinaison d'une discrétisation spatiale par éléments finis et d'un schéma d'intégration temporelle. Pour un problème bien posé un schéma numérique consistant, autrement dit tel que la solution des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, converge si et seulement si il est stable (différence entre la solution numérique et exacte est bornée), d'après le théorème de Lax. Il est possible d'utiliser un schéma explicite conditionnellement stable pour des problèmes simples, sous réserve que la condition de stabilité soit remplie, ou bien un schéma implicite inconditionnellement stable pour des cas un peu plus complexe. Néanmoins, lorsque l'on considère des problèmes dynamiques non linéaires, même les schémas implicites standards ( $\theta$ -méthode, Schémas de Newmark, points milieux ou méthodes de type Hilber-Hughes-Taylor) perdent leur stabilité inconditionnelle, comme expliqué dans [65, 88]. De ce fait, il faut utiliser des schémas implicites appropriés impliquant des propriétés de type conservation de l'énergie, cf

[12, 55, 60, 88, 133]. A cet égard, un certain nombre de travaux ont été consacrés à l'étude des phénomènes d'impact en grandes déformations ; Laursen et Chawla [89] et Armero et Petocz [11] ont montré l'intérêt de la condition de persistance, à savoir la condition de complémentarité entre la vitesse normale et la contrainte normale sur la frontière de contact, pour conserver l'énergie dans le cas discret lors de l'impact sans frottement. Toutefois, en procédant ainsi, l'interpénétration subsiste sauf lorsque le pas de temps tend vers 0. Pour surmonter cet obstacle, plusieurs méthodes existent ; nous pouvons citer : l'introduction d'un saut discret en vitesse [90], une pénalisation spécifique de la condition de contact [62], la méthode "Equivalent Mass Matrix" (EMM) [80, 81] basée sur une procédure de redistribution de la matrice de masse, ainsi que la stratégie à deux étapes développée dans [13, 14], permettant de satisfaire sur un même pas de temps les conditions de contact unilatéral et de contact persistant afin de conserver l'énergie. Dans le cas avec frottement, peu importe la méthode considérée, on s'attend à une dissipation d'énergie, en accord avec la physique du problème. Les travaux présentés dans ce manuscrit relèvent alors principalement des préoccupations que nous venons de détailler dans les paragraphes précédents.

La thèse est divisée en trois parties.

La première partie est consacrée à des préliminaires et des rappels du cadre général des problèmes de contact. Plus spécifiquement, le Chapitre 1 a pour vocation de poser le cadre physique, via la présentation du problème de contact fondamental qui nous occupe. Il s'agit là de présenter les différentes lois qui régissent le comportement des matériaux utilisés, la modélisation des différents types de contact traités par la suite ainsi que le formalisme de l'hyperélasticité. Dans le Chapitre 2, nous rappelons quelques éléments d'analyse fonctionnelle, d'analyse non linéaire et évoquons quelques résultats issus de la théorie des inéquations variationnelles. Enfin, le Chapitre 3 est dédié à la description de la méthode du Lagrangien augmenté avec et sans frottement, méthode utilisée dans l'ensemble des Chapitres dans la suite du manuscrit, une méthode de type "active set", en guise d'introduction au Chapitre 7, et de quelques méthodes de conservation de l'énergie qui seront utilisées au Chapitre 8.

Dans la deuxième partie, composée de trois Chapitres, nous étudions et analysons trois problèmes de contact avec frottement en petites déformations. Le Chapitre 4 concerne un problème élastique en statique avec compliance normale, contrainte unilatérale et frottement non-monotone. Après avoir établi la formulation forte et posé les hypothèses nécessaires à l'obtention d'une formulation faible, il s'agit de montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible. Ensuite, nous introduisons une formulation



duale de ce problème, que nous mettons en relation avec la formulation primale. Nous poursuivons l'étude avec la dépendance de la solution faible par rapport aux perturbations des données afin d'établir un résultat de convergence. L'analyse du problème se termine par l'obtention d'estimation de l'erreur de discrétisation spatiale inhérente à la méthode des éléments finis. Enfin, la dernière section du Chapitre est consacrée à la présentation des résultats numériques, comprenant une étude qualitative du comportement du modèle et une validation numérique des résultats théoriques. Ensuite, le Chapitre 5 porte sur un problème de contact viscoélastique avec terme mémoire en quasistatique avec réponse normale amortie, contrainte unilatérale en vitesse et frottement. Là encore, par une démarche similaire, on s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution faible, à sa dépendance par rapport aux perturbations des données, à l'analyse numérique du problème sous forme d'estimation numérique de l'erreur de discrétisation spatiale et temporelle et à l'obtention de simulations numériques visant à confirmer les résultats de convergence théorique et à illustrer les propriétés physiques du modèle. Nous terminons cette partie avec le Chapitre 6, portant sur un problème viscoélastique en dynamique avec compliance normale et frottement non-monotone. Cette fois, nous nous bornons à démontrer l'unicité de la solution faible en déplacement, l'existence ayant déjà été démontrée dans un article antérieur dans un cadre plus large, et à établir des estimations de l'erreur dans le cadre semi-discret ainsi que pour une approximation spatiale et temporelle. Ce Chapitre s'achève sur la présentation des résultats numériques, accompagnée comme dans les Chapitres précédents de la vérification de la concordance entre les estimations d'erreurs théoriques et d'erreurs numériques. Notons que ce choix spécifique de géométrie et de force de traction était motivé par une étude vibratoire. Un tel aspect ne sera toutefois pas abordé dans ce manuscrit.

La troisième et dernière partie comprend 2 Chapitres dans lesquels on s'intéresse respectivement à des méthodes de type "active set" et à des méthodes de type conservation de l'énergie. Le principe des méthodes de type "active set", déjà évoquées plus haut, est de déterminer au fil d'une procédure itérative le statut des noeuds (contact/non contact pour un problème sans frottement) pouvant potentiellement entrer en contact avec une fondation parfaitement rigide. Bien que ce type de méthodes ne soit pas aussi populaire que les méthodes présentées ci-avant, elle présente comme avantage indéniable de ne pas utiliser les multiplicateurs de Lagrange. S'il est vraisemblable qu'une telle méthode soit plus aisée à implémenter, on peut s'interroger sur les autres bénéfices qu'elle peut offrir en terme de précision, de convergence ou encore

de rapidité par rapport au Lagrangien augmenté dans le cadre des petites et grandes déformations sur le problème standard de la littérature que constitue le problème de Signorini. C'est l'objet du Chapitre 7, dans lequel nous nous intéressons à l'étude de deux méthodes de type "active set" : la première est celle présentée au Chapitre 3 et la seconde, plus originale, de type projection y est étudiée en proposant une analyse de convergence. Le Chapitre 8 s'inscrit lui aussi dans la continuité du Chapitre 3. Après avoir présenté la spécificité du modèle de contact pour l'étude de la conservation de l'énergie, nous considérons un problème de contact hyperélastique en dynamique avec compliance normale, contact unilatéral et frottement variable suivi de son approximation variationnelle. La section suivante fait l'objet de la présentation et de l'analyse d'une méthode de conservation de l'énergie, basée sur une continuation de la méthode de Newton adaptée en deux étapes, que nous étudions par rapport aux autres méthodes introduites dans le Chapitre 3 en petites et grandes déformations, avec et sans frottement.

Le manuscrit s'achève sur un bilan des résultats obtenus ainsi que sur une esquisse des perspectives envisageables, d'ordre mécaniques, mathématiques et numériques qui s'inscrivent dans la continuité de ce travail de recherche.



# Notation

On considère  $\Omega$ , un domaine de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) et on note par :

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$ .
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ supposée régulière.
$\Gamma_i$ ( $i = 1, 2, 3$ )	une partie mesurable de la frontière $\Gamma$ .
$mes \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de $\Gamma_1$ .
$\nu$	la normale unitaire sortante à $\Gamma$ .
$v_\nu$ , $\mathbf{v}_\tau$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel $\mathbf{v}$ défini sur $\overline{\Omega}$ .
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$ .
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des distributions sur $\Omega$ .
$H$	l'espace $L^2(\Omega)^d$ .
$Q$	l'espace $\left\{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \right\}$ .
$H_1$	l'espace $\left\{ \mathbf{u} = (u_i) \mid \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in Q \right\}$ .
$Q_1$	l'espace $\left\{ \boldsymbol{\sigma} \in Q : \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d \right\}$ .
$Q_\infty$	l'espace $\left\{ \mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) \mid \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d \right\}$ .
$W^{k,p}$	l'espace de Sobolev de paramètres $k$ et $p$ .
$H^k$	correspond à $W^{k,2}$ .
$V$	l'espace $\left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \right\}$ .
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ .
$H_\Gamma$	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ .
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .
$H'_\Gamma$	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si  $H$  est un espace de Hilbert réel et  $d \in \mathbb{N}^*$ , on utilise les notations suivantes :

$H^d$	l'espace $\left\{ \mathbf{v} = (v_i) \mid v_i \in H \text{ et } \partial_i \mathbf{v} \in H, i = \overline{1, d} \right\}$ .
$H^{d \times d}$	l'espace $\left\{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \mid \tau_{ij} = \tau_{ji} \in H \text{ et } \partial_j \tau_{ij} \in H, i, j = \overline{1, d} \right\}$ .
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de $H$ .
$\  \cdot \ _H$	la norme de $H$ .
$H'$	l'espace dual de $H$ .
$(\cdot, \cdot)_{H \times H}$	le produit de dualité entre $H'$ et $H$ .
$\psi_K$	la fonction indicatrice de $K \subset H$ .
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ dans $H$ .
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de $H$ dans $H$ .

Si de plus  $[0, T]$  un intervalle de temps,  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par :

$C([0, T]; H)$	l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $H$ .
$\  \cdot \ _{C([0, T]; H)}$	la norme de $C([0, T]; H)$ .
$C^1([0, T]; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0, T]$ dans $H$ .
$\  \cdot \ _{C^1([0, T]; H)}$	la norme de $C^1([0, T]; H)$ .
$L^p(0, T, H)$	l'espace des fonctions $f$ mesurables de $]0, T[$ dans $H$ telles que $\int_0^T \ f(t)\ _H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$ .
$\  \cdot \ _{0, H}$	la norme de $L^p(0, T, H)$ .
$W^{k, p}(0, T, H)$	l'espace de Sobolev de paramètres $k$ et $p$ de $]0, T[$ dans $H$ .
$\  \cdot \ _{k, p, H}$	la norme de $W^{k, p}(0, T, H)$ .

Pour une fonction  $f$ , on note par :

$\text{dom } f$	le domaine de $f$ .
$\text{supp } f$	le support de $f$ .
$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivées première et seconde de $f$ par rapport au temps.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de $f$ par rapport au temps.
$\nabla f$	le gradient de $f$ .
$\epsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$ .
$\text{Div } f$	la divergence de $f$ .
$\partial f$	le sous-différentiel (classique) de $f$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces de Hilbert réels, on note par :

$\mathcal{L}(X, Y)$  l'espace des applications linéaires et continues de  $X$  dans  $Y$ .

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$  la norme de  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

Soit  $X$  un espace de Banach, on note par :

$C(R_+; X)$  l'espace des fonctions continues définies sur  $R_+$  à valeurs dans  $X$ .



Première partie

Préliminaires





# Partie I

## Préliminaires

Avant d'entrer dans le vif du sujet, et afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, il nous est apparu utile de rappeler quelques notions préliminaires à notre travail de modélisation et d'analyse réalisé dans les Chapitres suivants. Pour cela, nous abordons successivement quelques considérations inhérentes à la mécanique de contact, des éléments concernant les espaces fonctionnels et l'analyse non linéaire pour enfin terminer sur un rappel portant sur des méthodes numériques faisant référence pour la résolution de problèmes de contact. Cette partie, constituée de trois Chapitres, aborde un certain nombre de concepts dont la connaissance est nécessaire à la compréhension de ce qui va suivre. Nous commençons par préciser le problème physique fondamental ainsi que quelques éléments de modélisation mathématique utilisés, puis nous décrivons les lois de comportement et les conditions de contact avec frottement. Ensuite, nous présentons les espaces fonctionnels qui interviennent de façon récurrente dans le manuscrit et nous revenons sur quelques résultats d'analyse fonctionnelle non linéaire dans l'espace de Hilbert. Enfin, nous rappelons les principes des méthodes du quasi-Lagrangien augmenté et des méthodes de type "Active Set" en faisant apparaître quelques différences et similitudes notables. Pour finir, nous présentons rapidement quelques méthodes de type conservation de l'énergie pour la résolution numérique des problèmes de contact en dynamique.



# Chapitre 1

## Modélisation

Dans ce premier Chapitre, il s'agit d'introduire le cadre physique et de rappeler succinctement quelques notions de mécanique des milieux continus, en particulier l'équation du mouvement de Cauchy, les lois de comportement pour les matériaux étudiés, ainsi que les conditions aux limites de contact avec ou sans frottement. Nous rappellerons également le formalisme des problèmes de contact dans le cas de l'hyperélasticité que nous utiliserons dans la dernière partie de la thèse.

### 1.1 Cadre physique

Soit un corps matériel occupant un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) avec une frontière Lipschitzienne  $\Gamma$  scindée en trois parties mesurables  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  telles que  $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ . Nous désignons par  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . Le corps est en équilibre sous l'action de forces volumiques de densité  $\boldsymbol{f}_0$ . Des forces de tractions de densité  $\boldsymbol{f}_2$  agissent sur  $\Gamma_2$ . Enfin, le corps est fixé sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  correspond à la zone potentielle de contact entre le corps et la fondation.

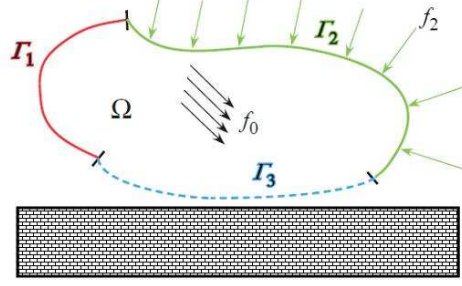


FIGURE 1.1 : Cadre physique.

**Notations.** Nous désignons par  $\mathbb{S}^d$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$ . Le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$  sont définis par

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, & \|\mathbf{v}\| &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\boldsymbol{\tau}\| &= (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} & \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de sommation d'Einstein.

Notons par  $\mathbf{u}$ , le champ de déplacements et par  $\boldsymbol{\sigma}$ , le champ de contraintes. Dès lors, pour un vecteur  $\mathbf{u}$  donné,  $u_\nu$  et  $\mathbf{u}_\tau$  représentent respectivement les composantes normale et tangentielle de  $\mathbf{u}$  sur  $\Gamma$ , i.e.

$$(1.1) \quad v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

De même,  $\sigma_\nu$  et  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$  désignent les contraintes normale et tangentielle sur  $\Gamma$ , i.e.

$$(1.2) \quad \sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

**Remarque 1.1.** Pour les simulations numériques, lors du contact, on prendra  $\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}^*$ , où  $\boldsymbol{\nu}^*$  désigne la normale à la fondation.

Ici, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation temporelle par rapport au temps; typiquement  $\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  et  $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ . Notons également qu'un indice suivant une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante de la variable;  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Enfin  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\text{Div}$  désignent respectivement le tenseur des déformations linéarisé (le terme d'ordre 2 est négligé dans le cadre des petites perturbations) et l'opérateur de divergence, i.e.

$$(1.3) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}).$$

**Mise en équation du problème.** Nous nous intéressons à un modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformable en contact avec une fondation ; ses inconnues sont le champ de déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , avec  $T > 0$  l'intervalle d'intérêt. Un tel problème est régi par l'équation du mouvement de Cauchy qui, dans le cas dynamique, est de la forme

$$(1.4) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T],$$

$\mathbf{f}_0$  renvoie aux forces volumiques appliquées au corps  $\Omega$  et  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  étant la densité de masse avec  $\mathbb{R}_+$ , l'ensemble des réels positifs. Dans les cas qui nous occupent par la suite, et par commodité, elle est supposée constante.

Si le processus est quasistatique, par définition, les variations de la vitesse sont négligeables et, par suite, l'équation (1.4) devient

$$(1.5) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T].$$

L'équation (1.5) est une équation d'équilibre. Dans le cas statique, elle est valable dans  $\Omega$ .

A présent, revenons un instant sur les conditions aux limites évoquées plus haut. Puisque le corps est encastré en  $\Gamma_1$ , le champ de déplacements y est nul,

$$(1.6) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T].$$

La condition aux limites en traction peut se mettre sous la forme

$$(1.7) \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T]$$

où  $\mathbf{f}_2$  désigne les forces de traction surfacique sur  $\Gamma_2$ . A ce stade, notons que le problème n'est pas encore bien posé ; les équations (1.4), (1.6) et (1.7) ne sont pas suffisantes pour caractériser totalement le mouvement du corps matériel déformable dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Plaçons nous dans le cas où  $d = 3$ . En faisant un bilan des équations scalaires disponibles et des inconnues scalaires à déterminer (cf Table 1.1), il est facile de voir que :

Inconnues scalaires à déterminer	Equations scalaires disponibles
Déplacement : 3	Equation d'équilibre : 3
Déformation : 6	Relations déplacement/déformation : 6
Contraintes : 6	
Inconnues : 15	Equations : 9

TABLE 1.1: Bilan des équations scalaires disponibles et des inconnues scalaires à déterminer

Pour l'instant, le problème tel qu'il est posé souffre d'un déficit de 6 équations. C'est la raison pour laquelle nous devons les compléter par des lois de comportement ; cela fait l'objet du paragraphe suivant.

## 1.2 Lois de comportement

Précisons que les considérations qui vont suivre ne sont valables que dans l'hypothèse des petites perturbations. Dans le cas des grandes déformations, nous ferons appel à un autre formalisme que nous présenterons à la fin de ce Chapitre. Une loi de comportement, ou loi constitutive, établit une relation entre le tenseur des contraintes  $\sigma$ , le tenseur des déformations  $\varepsilon$  et leurs dérivées temporelles respectives. Autrement dit, c'est une relation qui exprime le tenseur des contraintes actuel pour une particule en fonction du mouvement passé et des changements d'états que la particule a subis. Notons d'ailleurs que d'autres paramètres, tels que la pression ou la température, peuvent éventuellement intervenir dans une loi de comportement. De telles lois proviennent de résultats expérimentaux au cours desquels il est réalisé toute une série d'essais ; citons à ce titre : le chargement monotone, le fluage, la relaxation, la charge-décharge et l'écroutissement.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler les lois de comportement pour les matériaux élastiques, viscoélastiques et viscoélastiques avec terme mémoire que nous utilisons dans les Chapitres à venir.

### 1.2.1 Lois de comportement élastique

Un milieu homogène est dit élastique s'il existe un état de référence sans contrainte et si le tenseur des contraintes ne dépend que du tenseur des déformations infinitésimal

$\boldsymbol{\varepsilon}$  calculé à partir de cet état de référence, i.e :

$$(1.8) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

avec  $\mathcal{F}$ , une fonction pouvant être non linéaire. Dans le cas où  $\mathcal{F}$  dépend explicitement de  $\boldsymbol{x} \in \Omega$  et du tenseur des déformations infinitésimales, le milieu est dit élastique non-homogène.

Si le milieu est élastique linéaire, il y a alors une relation linéaire entre le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le tenseur des déformations infinitésimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dont il est possible de caractériser le comportement par la loi de Hooke qui, dans le cas tridimensionnel, est de la forme

$$(1.9) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$$

où  $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$  est le tenseur d'élasticité d'ordre 4. Il comporte 81 composantes appelées *constantes d'élasticité du milieu* qui sont indépendantes du tenseur des déformations dans le cas homogène. Toutefois, du fait des différentes symétries matérielles inhérentes à l'homogénéité et l'isotropie supposées du matériau (i.e. l'ensemble des directions autour d'un point sont équivalentes), nous avons

$$(1.10) \quad \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{ijlk},$$

et de ce fait, seules 21 d'entre elles sont indépendantes. Les composantes d'un tel tenseur vérifient

$$(1.11) \quad \mathcal{E}_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}),$$

où les constantes  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Soit, en combinant (1.9) et (1.11), nous obtenons

$$(1.12) \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

Notons que si le milieu est à la fois élastique, homogène, linéaire et isotrope, comme considéré dans l'équation ci-dessus, il répond au schéma de l'élasticité dite classique.

Précisons que  $\lambda$  et  $\mu$  peuvent aussi s'exprimer en fonction de  $E$ , le module de Young, et  $\kappa$ , le coefficient de Poisson,

$$\lambda = \frac{\kappa E}{(1 + \kappa)(1 - 2\kappa)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \kappa)},$$



dont on peut donner une interprétation physique. Dans un essai de traction simple d'une éprouvette constituée d'un matériau obéissant au schéma classique de l'élasticité, le module de Young est le rapport entre la tension et la dilatation longitudinale tandis que le coefficient de Poisson est le rapport entre la contraction transverse et la dilatation longitudinale. On utilisera la loi élastique de Hooke dans les parties II et III.

Pour terminer, nous présentons un exemple de loi illustrant un comportement élastique non linéaire dans un cas linéaire par morceaux en dimension 1. La loi (1.8) prend alors la forme,

$$(1.13) \quad \sigma = \mathcal{F}(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon + \beta(\varepsilon + \varepsilon_0) & \text{si } \varepsilon < -\varepsilon_0 \\ E\varepsilon & \text{si } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \\ E\varepsilon + \beta(\varepsilon - \varepsilon_0) & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases}$$

où  $\beta$  est une constante positive. Il est également possible de faire intervenir l'opérateur de projection  $P_K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $K = [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  pour obtenir une écriture plus compacte.

$$(1.14) \quad P_K(\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon_0 & \text{si } \varepsilon < -\varepsilon_0 \\ \varepsilon & \text{si } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \\ \varepsilon_0 & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases}$$

La loi (1.13) devient alors  $\sigma = E\varepsilon + \beta(\varepsilon - P_K\varepsilon)$ .

### 1.2.2 Lois de comportement viscoélastique

Il est clair que le comportement élastique est insuffisant pour rendre compte de phénomènes tels que la relaxation ou le fluage. En effet, si la déformation est maintenue à une valeur fixée  $\varepsilon_0$ , alors la contrainte sera également fixée à  $\sigma(\varepsilon_0)$  et ce, en toutes circonstances là où certains matériaux présentent une phase transitoire. Même chose si c'est cette fois la contrainte qui est maintenue à une valeur fixée ; la déformation sera également fixée. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire de faire intervenir d'autres modèles pour caractériser les matériaux tels que les polymères, les métaux au delà d'une certaine température, les élastomères ou certains tissus biologiques etc... De tels milieux présentent à la fois des propriétés élastiques, à savoir stocker et restituer de l'énergie mécanique comme un solide de Hooke, et de la viscosité, à savoir la capacité à dissiper de l'énergie comme un fluide newtonien.

**Modélisation de type rhéologique.** Nous nous plaçons dans le cas unidimensionnel. Il est alors possible d'avoir recours à un *élément rhéologique* caractérisant le milieu viscoélastique dans sa totalité. L'élément n'est relié à l'extérieur que par ses deux extrémités dont le déplacement relatif représente la déformation et les forces appliquées correspondent à la contrainte. L'obtention des équations différentielles régissant de tels modèles obéit aux règles suivantes :

- Pour un système d'éléments connectés en série, les contraintes coïncident et la déformation totale est la somme des déformations des éléments.
- Pour un système d'éléments connectés en parallèle, les déformations coïncident et la contrainte totale est la somme des contraintes des éléments.

De ce fait, la contrainte et la déformation jouent le même rôle que l'intensité et la tension respectivement, dans un circuit électrique.

Les propriétés élastiques sont représentées schématiquement par des ressorts (Figure 1.2 ). Dans ce cas, avec  $\sigma = E\varepsilon$ , on retrouve bien l'idée selon laquelle la contrainte est une fonction linéaire de la déformation. Notons bien que le terme ressort fait exclusivement référence au ressort linéaire ; il en existe d'autres types.

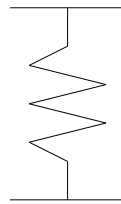


FIGURE 1.2 : Élément ressort

Les propriétés visqueuses sont, quant à elles, décrites en rhéologie par des pistons. La contrainte  $y$  est proportionnelle à la vitesse de déformation et elles ont le même signe. Le modèle élémentaire de la Figure 1.3 simule donc la loi de Newton, à savoir  $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$  avec  $\eta > 0$ .

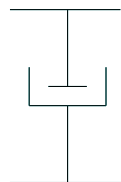


FIGURE 1.3 : Élément piston

La plupart des milieux viscoélastiques peuvent être modélisés en utilisant uniquement ces deux éléments. Dans ce cas, il est alors possible de se ramener à l'un des modèles suivants détaillé ci-après :

- Modèle de Maxwell généralisé.
- Modèle de Kelvin-Voigt généralisé.

**Modèle de Maxwell.** Il s'agit de connecter en série un piston et un ressort, comme montré ci-dessous.

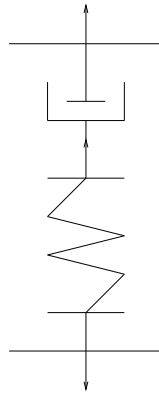


FIGURE 1.4 : Modèle de Maxwell

Avec les règles précédemment énoncées et après un calcul élémentaire, on constate que le modèle viscoélastique de Maxwell a pour loi constitutive

$$(1.15) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E},$$

avec  $E$  et  $\eta$ , le module de Young et le coefficient de Newton respectivement. Le modèle de Maxwell généralisé comprend deux ou plusieurs branches de Maxwell disposées en parallèle auxquelles est ajoutée, en parallèle avec l'ensemble, une branche comprenant un ressort, un piston ou les deux.

**Modèle de Kelvin-Voigt.** On y considère un ressort et un piston disposés en parallèle, comme montré ci-dessous.

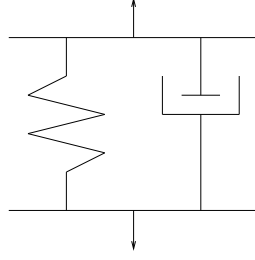


FIGURE 1.5 : Modèle de Kelvin Voigt

Avec les règles précédemment énoncées et après un calcul élémentaire, on constate que le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt a pour loi constitutive

$$(1.16) \quad \sigma = \eta \dot{\varepsilon} + E\varepsilon,$$

le modèle de Kelvin-Voigt généralisé s'obtient en mettant en série deux ou plusieurs modèles de Kelvin-Voigt auxquelles est ajoutée, en série avec l'ensemble, une branche comprenant un ressort, un piston ou les deux. On peut également généraliser le modèle de Kelvin-Voigt dans le cas multidimensionnel de la manière suivante :

$$(1.17) \quad \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u),$$

avec  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , deux opérateurs, respectivement de viscosité et d'élasticité et potentiellement non linéaire. Notons que seule la loi de Kelvin-Voigt sera utilisée dans le cadre de cette thèse, raison pour laquelle nous n'évoquons pas la forme de la loi constitutive multidimensionnelle pour le modèle de Maxwell.

### 1.2.3 Lois de comportement viscoélastique avec terme mémoire

Partant d'une loi viscoélastique de type Kelvin-Voigt, nous la complétons par l'ajout d'un terme de relaxation désigné par  $\mathcal{K}$  pour obtenir une loi viscoélastique avec terme mémoire, i.e :

$$(1.18) \quad \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{K}(t-s)\varepsilon(\dot{u}(t))ds.$$

Notons malgré tout qu'un tel choix n'est pas anodin ; ce type de loi a déjà été utilisé pour rendre compte du comportement de matériaux réels. A ce titre, on peut citer [16, 17] dans lesquels cette loi sert à modéliser l'amortissement par hystérésis dans les élastomères. Plus précisément, ici, l'effet mémoire peut être vu comme une détérioration du matériau suite au frottement entre les plans internes qui le constituent. On

utilisera la loi viscoélastique avec terme mémoire dans le Chapitre 5.

Du point de vue de la mécanique des milieux continus, le problème est à présent bien posé : nous avons autant d'équations que d'inconnues. Nous pouvons donc nous intéresser aux conditions de contact et lois de frottement à proprement parler.

## 1.3 Conditions de contact

Ces conditions portent sur la frontière de contact  $\Gamma_3$ , ou  $\Gamma_3 \times [0, T]$  dans un problème évolutif, et mettent en relation les composantes normales du champ de déplacements  $u_\nu$  et les composantes normales du champ de contraintes  $\sigma_\nu$ . On pourra retrouver ces lois dans [5, 91, 118, 136, 143].

### 1.3.1 Contact unilatéral

Proposée en 1933 par Antonio Signorini [132], cette loi de contact est encore aujourd'hui très populaire dans la littérature. Elle est décrite par les 3 conditions suivantes :

$$(1.19) \quad \begin{cases} (1) \text{ Condition de non pénétration} & u_\nu \leq 0, \\ (2) \text{ Condition de compression} & \sigma_\nu \leq 0, \\ (3) \text{ Condition de complémentarité} & \sigma_\nu u_\nu = 0. \end{cases}$$

Physiquement, cela revient à considérer une fondation parfaitement rigide ; peu importe la force de compression appliquée il n'y aura aucune pénétration. La condition de complémentarité traduit simplement que :

- Si  $u_\nu = 0$ , il y a contact et la force normale de contact est négative ( $\sigma_\nu \leq 0$ ),
- Si  $u_\nu < 0$ , il n'y a pas contact et dans ce cas la force de contact est nulle ( $\sigma_\nu = 0$ ).

Ces conditions peuvent également s'écrire sous une forme un peu plus compacte au moyen d'une inclusion sous-différentielle

$$(1.20) \quad -\sigma_\nu \in \partial \Psi_{\mathbb{R}_-}(u_\nu),$$

où  $\partial \Psi_{\mathbb{R}_-}$  représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice  $\Psi_{\mathbb{R}_-}$  de la partie négative de  $\mathbb{R}$ , résultat que l'on doit à [103, 108]. Le graphe multivoque de cette loi est représenté dans la Figure 1.6 .

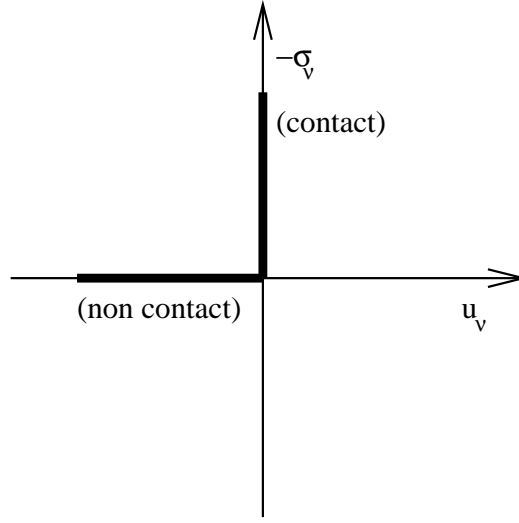


FIGURE 1.6 : Contact unilatéral

On peut également exprimer les conditions (1.19) en adoptant une forme de type projection :

$$(1.21) \quad -\sigma_\nu = \frac{1}{\gamma} [u_\nu - \gamma \sigma_\nu]_+,$$

où  $\gamma$  est une constante positive arbitraire et avec  $[r]_+ = \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(r) = \max\{0, r\}$ . Il a été démontré dans [41] en particulier que (1.19) et (1.21) sont équivalents. Nous utiliserons notamment une telle forme dans la partie III de ce manuscrit.

Si l'on suppose cette fois l'existence d'un interstice  $g$  entre la fondation et le corps, les conditions de Signorini sont alors de la forme :

$$(1.22) \quad \begin{cases} (1) \text{ Condition de non pénétration} & u_\nu \leq g, \\ (2) \text{ Condition de compression} & \sigma_\nu \leq 0, \\ (3) \text{ Condition de complémentarité} & \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0. \end{cases}$$

Là encore, il est possible d'obtenir une expression plus compacte grâce à un changement de variable dans (1.20)

$$-\sigma_\nu \in \partial \Psi_{\mathbb{R}^-}(u_\nu - g).$$

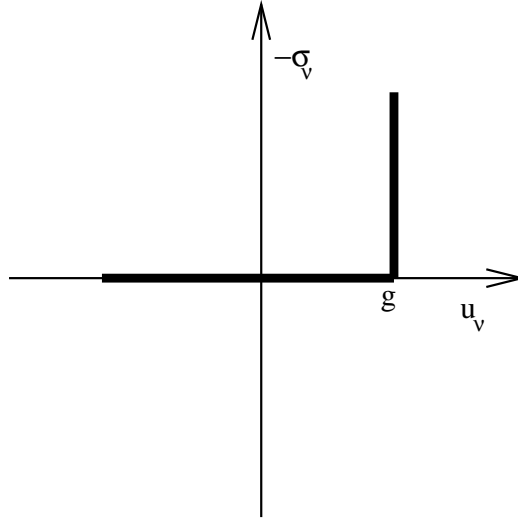


FIGURE 1.7 : Contact unilatéral avec interstice  $g$

En outre, par l'intermédiaire de la formulation en projection, (1.22) peut aussi s'écrire de façon équivalente

$$(1.23) \quad -\sigma_\nu = \frac{1}{\gamma}[(u_\nu - g) - \gamma\sigma_\nu]_+.$$

Le graphe multivoque de cette loi est représenté dans la Figure 1.7 .

### 1.3.2 Contact avec compliance normale

Intéressons nous maintenant à un autre type de loi, tout aussi populaire que la précédente, dans laquelle la fondation est cette fois supposée déformable. Elle fut utilisée pour la première fois dans [97] dans un problème dynamique viscoplastique. La contrainte normale  $\sigma_\nu$  y est supposée satisfaire la condition suivante :

$$(1.24) \quad -\sigma_\nu = p(u_\nu),$$

où  $p$  désigne une fonction donnée à valeur dans  $\mathbb{R}_+$ , du fait de la compression du corps, s'annulant pour tout argument négatif. Cela signifie en particulier qu'une telle loi autorise la pénétration, dont la contrainte normale  $\sigma_\nu$  est fonction. La représentation de la loi de compliance normale dépend de la fonction de compliance  $p$  choisie ; en l'occurrence la Figure 1.8 correspond au cas

$$p(r) = c[r]_+,$$

où  $c$  peut être assimilé au coefficient de rigidité de la fondation.

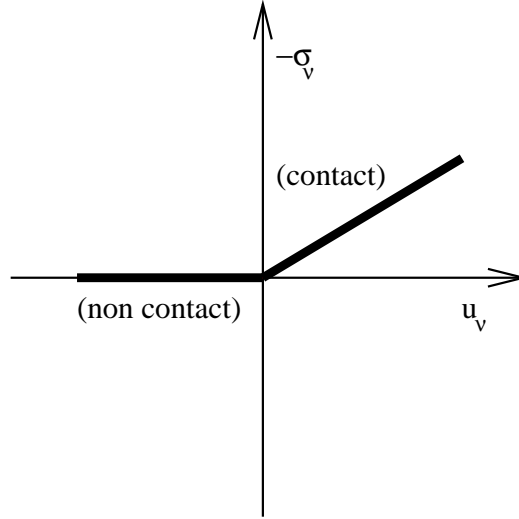


FIGURE 1.8 : Contact avec compliance normale

Notons d'ailleurs que ce choix de  $p$  permet de donner lieu à une autre interprétation : en faisant tendre le coefficient de rigidité  $c$  vers l'infini, nous retrouvons une fondation parfaitement rigide, soit la loi de Signorini évoquée plus haut. On peut donc considérer que la loi de compliance normale représente une pénalisation de la loi de Signorini. Au delà de l'intérêt mécanique que peut offrir ce type de loi, elle est fréquemment employée afin de régulariser la loi de Signorini pour l'analyse des problèmes de contact.

### 1.3.3 Contact avec réponse normale instantanée

Dans ce type de modèle, la contrainte normale  $\sigma_\nu$  obéit cette fois à la condition suivante :

$$(1.25) \quad -\sigma_\nu = p(\dot{u}_\nu),$$

où  $p$  est fonction de la vitesse normale à valeur dans  $\mathbb{R}_+$  et s'annulant, une fois encore pour tout argument négatif. Elle a été utilisée en particulier dans [56]. Préférentiellement, nous utiliserons la forme suivante pour  $p$  :

$$p(r) = \kappa[r]_+,$$



où  $\kappa$  peut être ici assimilé au coefficient d'amortissement de la fondation. Dans le cas présent, le graphe est analogue à celui de la figure 1.8 en substituant le déplacement normal  $u_\nu$  en abscisse par la vitesse normale  $\dot{u}_\nu$ . Bien qu'une telle loi soit d'une forme similaire à celle employée pour la loi de compliance normale, présentée ci-avant, le fait de substituer la dépendance en déplacement dans cette dernière par une dépendance en vitesse rend son interprétation physique un peu moins immédiate et intuitive. De fait, un tel comportement est caractéristique d'une fondation constituée d'un fluide visqueux, typiquement de l'huile, et la réaction du fluide visqueux considéré sera d'autant plus forte que la vitesse normale du corps est élevée. Dans ce type de problème, l'influence de la vitesse prédomine sur celle du déplacement. Par contre, pour une vitesse normale négative, il n'y a pas de réaction. D'un point de vue mécanique, cela revient à considérer que le corps se déplace en direction d'une fondation fournissant une résistance analogue à celle d'un piston.

### 1.3.4 Contact avec compliance normale et contrainte unilatérale

Cette condition de contact a été introduite pour la première fois dans [76] dans l'étude d'un problème dynamique pour des matériaux élasto-visco-plastiques et vise à pallier les limites des deux lois dont elle est issue. De fait, ni les conditions de Signorini, ni la condition de compliance normale ne sont tout à fait admissibles d'un point de vue physique ; dans les premières, on suppose que la fondation est parfaitement rigide tandis que la seconde autorise une pénétration non contrôlable. Nous allons donc considérer un cas intermédiaire où la fondation est constituée d'un matériau parfaitement rigide sur lequel repose une fine couche d'aspérités déformables d'épaisseur  $g$ , limitant ainsi la pénétration. Une telle loi est décrite par les relations suivantes :

$$(1.26) \quad \begin{cases} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0. \end{cases}$$

Cette loi peut aussi s'écrire sous la forme d'une inclusion sous-différentielle :

$$(1.27) \quad -\sigma_\nu \in \partial\Psi_{\mathbb{R}_-}(u_\nu - g) + p(u_\nu),$$

dont une représentation graphique figure ci dessous.

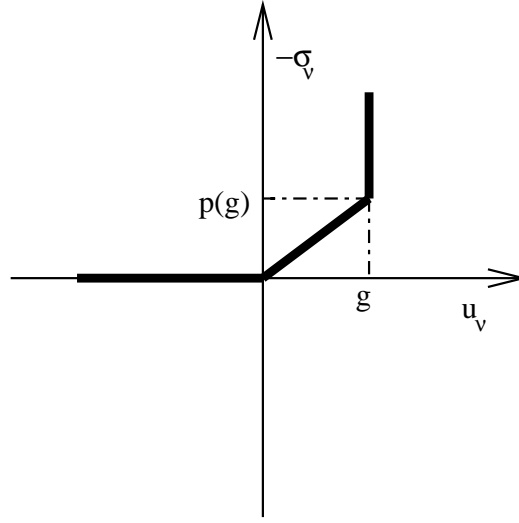


FIGURE 1.9 : Contact avec compliance normale et contrainte unilatérale

Par suite, nous pouvons faire les observations suivantes :

- Si  $0 \leq u_\nu \leq g$ , alors la contrainte normale  $\sigma_\nu$  est une fonction univoque de  $u_\nu$  (compliance normale).
- Si  $u_\nu = g$ , cela signifie que la couche d'aspérités a été complètement écrasée ; le corps est en contact avec le matériau rigide (conditions de Signorini avec un interstice de taille  $g$ ).
- Si on fait tendre  $g$  vers 0, la couche d'aspérités disparaît ; nous retrouvons la loi de contact unilatéral.
- Si on fait tendre  $g$  vers  $\infty$ , la fondation n'est plus constituée que d'un matériau déformable ; nous retrouvons la loi de compliance normale.

### 1.3.5 Contact avec réponse normale instantanée et contrainte unilatérale en vitesse

Cette loi est en fait la réécriture de la loi de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale formulée en vitesse. Elle se présente sous la forme suivante :

$$(1.28) \quad \begin{cases} \dot{u}_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(\dot{u}_\nu) \leq 0, \\ (\dot{u}_\nu - g)(\sigma_\nu + p(\dot{u}_\nu)) = 0. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une combinaison de la loi de contact unilatéral en vitesse et de la loi de contact avec réponse normale instantanée. A ce titre, notons que l'utilisation d'une loi de Signorini en vitesse, à savoir

$$(1.29) \quad \dot{u}_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad (\dot{u}_\nu - g)\sigma_\nu = 0.$$

est tout sauf standard mais relève bien d'un sens physique. En particulier, nous pouvons mettre en avant le fait qu'une vitesse de pénétration non contrôlable n'est guère plus admissible d'un point de vue physique qu'une pénétration non contrôlable, à l'instar de la loi de compliance normale. De ce fait, par rapport à la loi précédente, la nature de  $g$  change : la restriction ne porte plus sur le déplacement  $u_\nu$  mais bien sur la vitesse  $\dot{u}_\nu$ . On ne peut donc plus parler de couche déformable constituée d'aspérités mais d'une couche de lubrification, déjà évoquée un peu plus haut pour décrire le comportement de la loi de réponse normale instantanée. Par suite, nous pouvons faire les observations suivantes :

- $0 \leq \dot{u}_\nu < g$ , alors la contrainte normale  $\sigma_\nu$  est une fonction univoque de  $\dot{u}_\nu$  (réponse normale instantanée)
- Si  $\dot{u}_\nu = g$ , la vitesse limite a été atteinte (conditions de Signorini en vitesse avec une vitesse limite  $g$ ).

Il convient également de préciser que la formulation en vitesse de (1.28) présente quelques intérêts pour les problèmes évolutifs, ne serait ce que pour sa cohérence avec la loi de Coulomb qui est également formulée en vitesse dans ce cas. En effet, pour certains auteurs, le traitement d'une loi de contact formulée ainsi semble être plus aisé qu'un traitement d'une loi formulée en déplacement et cela, à la fois d'un point de vue mathématique [75] et d'un point de vue numérique [126]. Côté mécanique, on peut noter que cette loi est utilisée dans [138] pour décrire le processus de labour, la vitesse de la charrue ne pouvant pas dépasser la vitesse  $g$  de la terre déplacée par l'instrument aratoire.

Enfin, notons que la condition de complémentarité de (1.29) revêt d'une importance capitale pour les questions de conservation de l'énergie, comme nous le verrons dans la loi présentée ci-après et dans le Chapitre 3.

### 1.3.6 Condition de persistance

Une telle loi se situe un peu en marge des précédentes dans la mesure où son intérêt principal réside dans ses propriétés naturelles de type conservation de l'énergie. La condition de persistance s'exprime sous la forme de la condition de complémentarité

suivante :

$$(1.30) \quad \sigma_\nu \dot{u}_\nu = 0.$$

Cette condition seule suffit à garantir que le travail de la force normale de contact (à savoir,  $\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \dot{u}_\nu da$ ) s'annule. Combinée à la loi de contact unilatéral, elle prend la forme suivante

$$(1.31) \quad \text{loi de contact persistant} \quad \begin{cases} \text{si } u_\nu < 0, \sigma_\nu = 0 \\ \text{si } u_\nu = 0, \sigma_\nu \in \partial\Psi_{\mathbb{R}_-}(\dot{u}_\nu). \end{cases}$$

Cette loi sera abordée plus en détails dans les Chapitres 3 et 8.

## 1.4 Lois de frottement

Nous considérons à présent les conditions portant sur la frontière de contact  $\Gamma_3$  (respectivement  $\Gamma_3 \times [0, T]$  dans un cas évolutif) mettant en relation la contrainte tangentielle  $\sigma_\tau$ , d'une part, et la contrainte normale  $\sigma_\nu$ , la vitesse tangentielle  $\dot{\mathbf{u}}_\tau$  et le déplacement tangentiel  $\mathbf{u}_\tau$ , d'autre part, selon le cas. Il s'agit ici de caractériser un seuil de contraintes en dessous duquel aucun glissement n'est possible.

### 1.4.1 Absence de frottement

C'est la condition la plus simple qui soit dans laquelle on considère une surface idéalisée ne présentant pas de frottement, c'est à dire

$$(1.32) \quad \sigma_\tau = \mathbf{0}.$$

Notons malgré tout qu'une telle approximation de la réalité reste raisonnable dans quelques situations, rendant ainsi tout à fait licite son utilisation dans de nombreux problèmes.

### 1.4.2 Frottement de Tresca

Nommée ainsi par analogie avec le critère de Tresca en plasticité [140], nous supposons ici que le seuil de contrainte  $F_{tres} > 0$  est fixe. Si la contrainte tangentielle est inférieure en norme au seuil, alors il y a adhérence entre le corps et la fondation. Si par contre ce seuil est atteint, alors le corps glisse sur la fondation tandis que la contrainte tangentielle s'oppose au mouvement.

Il en existe deux versions, selon le type de processus considéré.

#### Cas statique

$$(1.33) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq F_{tres}, & (\text{adhérence}) \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = F_{tres} \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} & \text{si } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \quad (\text{glissement}). \end{cases}$$

#### Cas évolutif

$$(1.34) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq F_{tres}, & (\text{adhérence}) \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = F_{tres} \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} & \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0} \quad (\text{glissement}). \end{cases}$$

### 1.4.3 Frottement de Coulomb

Il s'agit sans aucun doute de la loi de frottement la plus connue et de l'une des plus utilisées dans la littérature. Formulée pour la première fois par Amontons en 1699 dans son mémoire, Charles-Augustin Coulomb a été en mesure de la confirmer et d'étendre son domaine de validité au cas des très fortes charges en 1785.

Le dispositif de Coulomb peut-être décrit de la manière suivante : on considère un plateau horizontal terminé par deux butées sur lequel peut glisser un traineau, que l'on peut charger, tiré par une corde, dont la tension est réglable. L'objectif est d'établir la valeur de la tension de la corde suffisante pour l'emporter sur la force de frottement ; le traineau se met alors à glisser. Parmi les conclusions de Coulomb, on peut retenir que :

-Le seuil de frottement est proportionnel au poids du solide posé sur la plateau horizontal.

-Pour un chargement donné, ce seuil ne dépend que de la nature des surfaces en contact. Il est ici fait référence au coefficient de frottement, noté  $\mu$ .

Dans le cas de la loi de frottement de Coulomb, à la différence de la loi de frottement de Tresca, le seuil limite n'est plus fixé et dépend à présent du coefficient de frottement  $\mu$  et de la contrainte normale de contact  $\sigma_\nu$ . La loi de frottement de Coulomb va alors mettre en concurrence, via le coefficient de frottement  $\mu$ , la contrainte tangentielle de frottement  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$  et la contrainte normale de contact  $\sigma_\nu$ . De fait, comme pour la loi de Tresca, il en existe deux versions selon le type de processus considéré.

#### Cas statique

$$(1.35) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu|, & (\text{adhérence}) \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu |\sigma_\nu| \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} & \text{si } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \quad (\text{glissement}). \end{cases}$$

### Cas évolutif

$$(1.36) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu|, & (\text{adhérence}) \\ -\sigma_\tau = \mu |\sigma_\nu| \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} & \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0} \quad (\text{glissement}). \end{cases}$$

Il est également possible d'écrire la loi évolutive sous la forme d'une inclusion sous différentielle :

$$(1.37) \quad -\sigma_\tau \in \partial \Psi_{C(\mu|\sigma_\nu|)}^*(\dot{\mathbf{u}}_\tau),$$

où  $C(\mu|\sigma_\nu|)$  désigne le disque de Coulomb de rayon  $\mu|\sigma_\nu|$  et  $\Psi_{C(\mu|\sigma_\nu|)}^*$  le conjugué au sens de Fenchel de la fonction indicatrice  $\Psi$  de  $C(\mu|\sigma_\nu|)$ . Une autre forme équivalente peut également être employée

$$(1.38) \quad -\sigma_\tau \in \mu|\sigma_\nu| \partial \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|.$$

Elle est représentée par la Figure 1.10 .

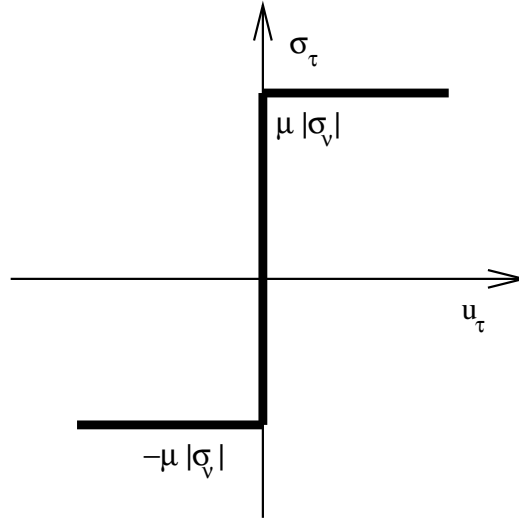


FIGURE 1.10 : Loi de Coulomb.

#### 1.4.4 Frottement non monotone

Des versions généralisées de la loi de Coulomb furent introduites afin de décrire les phénomènes d'instabilité liés au frottement. En particulier, il est possible de considérer un coefficient de frottement  $\mu$  variable. Il a été d'abord proposé de considérer un coefficient  $\mu_s$  (coefficient de frottement statique) représentant le rapport entre  $\|\sigma_\tau\|$

et  $|\sigma_\nu|$  en dessous duquel il n'y a pas de glissement, et un coefficient  $\mu_d$  (coefficient de frottement dynamique) représentant la valeur de ce rapport lorsque le glissement a lieu au cours du mouvement. En général, le coefficient de frottement dynamique est plus faible que le coefficient de frottement statique, reflétant ainsi l'idée selon laquelle il est plus simple de maintenir un objet en statut de glissement en mouvement que de faire glisser un objet au repos. Puisque  $\mu_d$  est supposé être inférieur à  $\mu_s$ , la loi de frottement présente alors une non monotonie. On se propose de considérer par la suite un coefficient de frottement qui peut dépendre du déplacement tangentiel  $\|\mathbf{u}_\tau\|$ , dans le cas statique, ou du module de la vitesse de glissement  $\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|$ , dans le cas évolutif, et permettant de passer de  $\mu_s$  à  $\mu_d$  au cours du glissement. Voici les exemples auxquels nous sommes confrontés dans les Chapitres suivants. **Premier exemple**

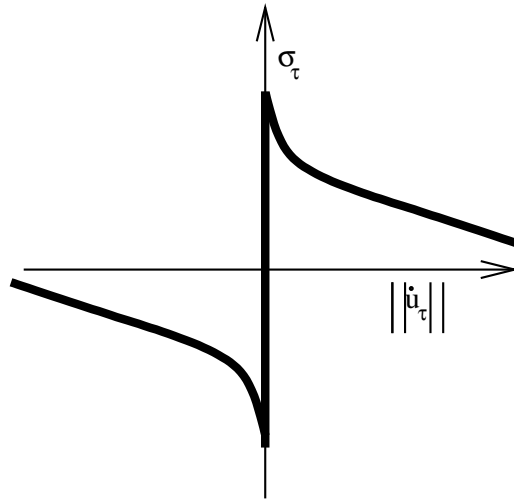


FIGURE 1.11 : frottement non monotone

Avec un contact de type compliance normale (1.24), nous pouvons considérer la loi de frottement suivante

$$(1.39) \quad \begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p(u_\nu) \\ -\sigma_\tau = \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p(u_\nu) \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \end{cases} \quad \text{si } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0}.$$

Cette loi de frottement est caractérisée par un seuil de glissement  $\mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p(u_\nu)$  qui dépend à présent du coefficient de frottement  $\mu$  et de la contrainte normale de contact définie par la fonction de compliance normale introduite dans la sous-section 1.3.2. Dans un cas statique, la non monotonie du coefficient de frottement  $\mu$  peut alors être

caractérisée par une dépendance en fonction de la norme du déplacement tangentiel  $\|\mathbf{u}_\tau\|$  qui peut prendre la forme suivante

$$\mu(r) = (a - b) \cdot e^{-\alpha r} + b,$$

avec  $a, b, \alpha > 0$ ,  $a \geq b$ . Cette loi décrit le phénomène de décroissance du seuil de glissement qui est constaté dans l'étude des problèmes géologiques [114, 129]. Notons que, pour  $a = b$ , cette fonction est constante et pour  $a \neq b$  elle est décroissante. Ainsi, d'après la terminologie introduite dans [20], dans le cas  $a = b$  nous désignerons la loi de frottement (1.39) comme monotone et, dans le cas  $a \neq b$ , nous parlerons d'une loi de frottement non-monotone. Une telle loi sera utilisée dans le Chapitre 4.

De manière analogue, il est possible de considérer la loi de Coulomb non monotone pour un processus évolutif dans lequel le contact est décrit par une loi de compliance normale de la manière suivante

$$(1.40) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu(\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|) p(u_\nu) \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu(\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|) p(u_\nu) \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} \end{cases} \quad \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}.$$

### Deuxième exemple

Dans le cas où nous considérons un contact de type compliance normale avec contraintes unilatérales (1.26), nous pouvons proposer pour un processus d'évolution une loi de frottement légèrement différente de la précédente sous la forme

$$(1.41) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq -\mu(u_\nu) \sigma_\nu & \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}, \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mu(u_\nu) \sigma_\nu \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} & \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}, \end{cases}$$

pour laquelle le coefficient de frottement  $\mu$  est à présent une fonction du déplacement normal  $u_\nu$ . Nous pouvons alors considérer les exemples suivants :

$$\mu_1(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \eta \leq 0, \\ \frac{\eta}{g} \mu_0 & \text{pour } \eta \in (0, g), \\ \mu_0 & \text{pour } \eta \geq g. \end{cases} \quad \mu_2(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \eta \leq 0, \\ (2 - \frac{\eta}{g}) \mu_0 & \text{pour } \eta \in (0, g), \\ \mu_0 & \text{pour } \eta \geq g. \end{cases}$$

Ici  $\mu_0 = \mu(g)$  désigne un coefficient de frottement donné associé au contact unilatéral après compression des aspérités de taille  $g$  ( $u_\nu = g$ ). Notons que, dans le cas de la fonction  $\mu_1$ , le seuil de frottement est fonction croissante de la pénétration. A l'inverse, dans le cas de la fonction  $\mu_2$ , le seuil de frottement est fonction décroissante de l'écrasement des aspérités. A ce titre on peut citer, entre autres, [74, 94, 95]. Une telle loi sera utilisée dans le Chapitre 8.



## 1.5 Formalisme de l'hyperélasticité

Nous nous intéressons à présent à une modélisation faisant intervenir un formalisme assez différent de celui vu jusqu'à présent, formalisme dont nous allons rappeler brièvement les grandes lignes. Pour ce faire, nous présentons tout d'abord la modélisation mécanique, à savoir l'aspect cinétique, les lois constitutives, les équations d'équilibres suivies de la formulation variationnelle à proprement parler, qui découle du principe des puissances virtuelles, et de la formulation de type minimisation de l'énergie. Ce qui va suivre découle des présentations de P. le Tallec et P.G. Ciarlet faites dans [96] et [43] respectivement.

### 1.5.1 Cinétique

Soit un corps continu, i.e. un domaine compact de  $\mathbb{R}^3$ . On désigne par  $\Omega^\varphi$  et  $\Omega$  la configuration du corps déformé et la configuration de référence du corps, respectivement. Pour rappel,  $\Gamma = \partial\Omega$  correspond à la frontière de  $\Omega$ . Nous considérons une déformation du corps  $\Omega$ , préservant l'orientation, caractérisée par :

$$(1.42) \quad \varphi : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \Omega^\varphi \subset \mathbb{R}^3, \text{ avec } \det \nabla \varphi > 0 \text{ sur } \bar{\Omega} \times [0, T].$$

Le point  $\mathbf{x}^\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t) \in \Omega^\varphi$  correspond à la position de la particule  $\mathbf{x}$  soumise à la déformation  $\varphi$  au temps  $t$ . Le champ de déplacement peut alors être décrit de la manière suivante :

$$(1.43) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}.$$

Par la suite, nous omettrons la dépendance par rapport à la variable  $t$ , afin d'alléger quelque peu les notations. Les changements de longueur, d'aire et de volume dans la configuration déformée  $\Omega^\varphi$  sont gouvernés par le **gradient de déformation** :

$$(1.44) \quad \mathbf{F} = \nabla \varphi = \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{u}, \text{ qui a pour composantes } \mathbf{F}_{ij} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j},$$

qui traduit la transformation d'un vecteur élémentaire  $\delta \mathbf{x}$  attaché au point  $\mathbf{x}$  en la quantité  $\delta \mathbf{x}^\varphi = \mathbf{F} \delta \mathbf{x}$  de longueur suivante :

$$\begin{aligned} |\delta \mathbf{x}^\varphi|^2 &= \delta \mathbf{x}^\varphi \cdot \delta \mathbf{x}^\varphi \\ &= (\mathbf{F} \delta \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F} \delta \mathbf{x}) \\ &= \delta \mathbf{x}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \delta \mathbf{x} \\ &= \delta \mathbf{x}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Le tenseur  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ , également désigné sous le nom de premier tenseur de Cauchy-Green, permet ainsi de mesurer la longueur d'un vecteur élémentaire après déformation. Ainsi, par analogie, un élément de volume  $d\mathbf{x}$  et un élément d'aire  $n da$  sont transformés en :

$$(1.45) \quad d\mathbf{x}^\varphi = \det(\mathbf{F}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

$$(1.46) \quad n^\varphi da^\varphi = (\det(\mathbf{F}))\mathbf{F}^{-T}n da = (\text{cof}\mathbf{F})n da.$$

**Remarque 1.2.** On peut également considérer le tenseur de Green-Lagrange afin de mesurer l'écart entre une déformation donnée et une déformation rigide.

$$(1.47) \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{C} - \mathbf{Id}}{2}.$$

On retrouve alors le tenseur des déformations :

$$(1.48) \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{C} - \mathbf{Id}}{2} = \frac{\nabla\varphi^T \nabla\varphi - \mathbf{Id}}{2} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}^T \nabla\mathbf{u}) + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u}),$$

ce qui nous donne, en théorie linéarisée (i.e en négligeant le terme d'ordre 2) :

$$(1.49) \quad \epsilon = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u}).$$

Nous allons à présent introduire et définir les invariants du premier tenseur de Cauchy-Green. Puisque  $\mathbf{C}$  est symétrique et défini positif, par construction, il possède 3 valeurs propres strictement positives notées  $(\lambda_i^2(\mathbf{C}))_{i=1}^3$ . De ce fait, les invariants  $(\mathbf{I}_i(\mathbf{C}))_{i=1}^3$  de  $\mathbf{C}$  peuvent être déterminés par l'intermédiaire de son polynôme caractéristique :

$$(1.50) \quad \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{Id}) = (\lambda_1^2 - \lambda)(\lambda_2^2 - \lambda)(\lambda_3^2 - \lambda) = 0$$

$$(1.51) \quad = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0,$$

ce qui donne, par identification

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2(\mathbf{C}) &= \frac{1}{2}\{(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - (\text{tr}(\mathbf{C}^2))\} \\ &= \text{tr}(\text{cof}(\mathbf{C})) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2, \\ I_3(\mathbf{C}) &= \det(\mathbf{C}) = (\det\mathbf{F})^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \equiv J^2. \end{aligned}$$

**Remarque 1.3.** Dans le cas bidimensionnel, le tenseur  $\mathbf{C}$  ne comprend que 2 invariants :

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \text{tr}(\mathbf{C}) \\ I_2(\mathbf{C}) &= \det(\mathbf{C}) = J^2, \end{aligned}$$

puisque  $\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{Id}) = (\lambda_1^2 - \lambda)(\lambda_2^2 - \lambda)$ .

### 1.5.2 Lois constitutives

Là encore, comme dans le cadre des petites perturbations évoqué dans la section 1.2, les équations d'équilibre définies par la suite ne seront pas suffisantes pour caractériser totalement le mouvement du corps matériel déformable. Il convient donc d'introduire des lois constitutives permettant de relier le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\Pi}$  aux variables cinématiques.

On parle de matériau **élastique** si le tenseur  $\boldsymbol{\Pi}$  dépend du point  $\mathbf{x}$  et du gradient de déformation  $\mathbf{F}$  i.e.

$$(1.52) \quad \boldsymbol{\Pi} : (\mathbf{x}, \mathbf{F}) \in \Omega \times \mathbb{M}_+^3 \mapsto \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) \in \mathbb{M}^3,$$

avec

$$(1.53) \quad \mathbb{M}_+^3 = \{\mathbf{F} \in \mathbb{M}^3, \det \mathbf{F} > 0\}.$$

La relation  $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{F})$  est appelée loi constitutive du matériau.

**Définition de l'hyperélasticité :**

Un matériau est dit hyperélastique s'il existe une application :

$$(1.54) \quad \hat{W} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dérivable par rapport à } \mathbf{F}$$

telle que :

$$(1.55) \quad \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3.$$

$\hat{W}$  est alors la densité d'énergie hyperélastique stockée dans le corps soumis à la déformation  $\varphi$ . Notons bien que  $\hat{W}$  doit être invariant par changement de repère dans lequel la déformation est observée. Pour ces raisons,  $\hat{W}$  doit vérifier la propriété d'objectivité ou d'indifférence matérielle, détaillée ci-après.

**Principe de l'indifférence matérielle :**

$$(1.56) \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{QF}) = \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{O}_+^3 \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3,$$

où  $\mathbb{O}_+^3$  est l'ensemble des rotations dans  $\mathbb{R}^3$  défini par  $\mathbb{O}_+^3 = \{\mathbf{Q} \in \mathbb{M}_+^3; \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Id}\}$ , avec le cas particulier de  $\mathbf{Q} = \sqrt{\mathbf{C}}\mathbf{F}^{-1}$ , qui représente une rotation puisque

$$(1.57) \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{C}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{Id}.$$

Le principe de l'indifférence matérielle donne

$$(1.58) \quad \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = \hat{W}(\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{C}}) = \tilde{W}(\mathbf{x}, \mathbf{C}).$$

Autrement dit, l'énergie interne élastique ne dépend que du premier tenseur de Cauchy-Green. De là, en supposant que  $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}$  est symétrique :

$$\begin{aligned} dW &:= \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}} : d\mathbf{F} \\ &:= \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} : d\mathbf{C} \\ &= \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} : (d\mathbf{F}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T d\mathbf{F}) \\ &= \left( \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T : (d\mathbf{F}^T\mathbf{F})^T + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} : (\mathbf{F}^T d\mathbf{F}) \\ &= 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} : \mathbf{F}^T d\mathbf{F} \\ &= 2\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} : d\mathbf{F}. \end{aligned}$$

Par identification, nous obtenons donc que

$$(1.59) \quad \boldsymbol{\Pi} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}.$$

Dans le cas de matériau isotrope, nous avons le théorème de représentation suivant :

**Théorème 1.4.** *Pour tout matériau hyperélastique isotrope, la densité d'énergie élastique  $\hat{W}$  satisfait :*

$$(1.60) \quad \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = W(\mathbf{x}, I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})).$$

**Conséquence :** Le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\Pi}$  est assez facile à établir pour des matériaux isotropes et est donné par

$$(1.61) \quad \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{F} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{Id} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right]$$

La loi hyperélastique la plus simple est une fonction quadratique isotrope du tenseur  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{Id})$  et est appelée loi de Kirchhoff - Saint-Venant.

$$(1.62) \quad \hat{W}(\mathbf{F}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \mathbf{E})^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2),$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé introduits dans l'élasticité linéaire.

Toutefois il n'y a pas d'existence globale pour ce modèle car l'hypothèse de polyconvexité n'est pas vérifiée (cf [44]). Cependant, on peut trouver d'autres lois, comme la loi d'Ogden revisitée dans [45], permettant de pallier cet inconvénient.

$$(1.63) \quad \hat{W}_{Ogden}(\mathbf{F}) = \mathbf{C}_1(I_1 - 3) + \mathbf{C}_2(I_2 - 3) + a(I_3 - 1) - (\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{C}_2 + a) \ln I_3.$$

où  $I_1, I_2$  et  $I_3$  représentent les invariants du tenseur  $\mathbf{C}$ . Pour tous ces modèles de densité hyperélastique, on peut également introduire le 2<sup>eme</sup> tenseur de Piola - Kirchhoff  $\tilde{\Sigma}$  symétrique défini par

$$(1.64) \quad \tilde{\Sigma} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{II},$$

permettant d'obtenir la loi constitutive suivante

$$(1.65) \quad \tilde{\Sigma} = \lambda(\text{tr} \mathbf{E}) \text{Id} + 2\mu \mathbf{E} + o(\|\mathbf{E}\|^2).$$

Cette loi permet de retrouver ainsi la loi de comportement au voisinage de la configuration de référence, i.e. lorsque les déformations sont suffisamment faibles  $\|\mathbf{E}\| \ll 1$ . L'équation (1.65) se démontre en utilisant le théorème 3 de représentation issu de [44].

**Remarque 1.5.** En élasticité linéaire, on retrouve effectivement :

$$(1.66) \quad \sigma = \lambda(\text{tr} \epsilon) \text{Id} + 2\mu \epsilon \quad \text{avec } \epsilon = \frac{\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}}{2},$$

à partir de

$$(1.67) \quad \sigma = \frac{\partial W(\epsilon)}{\partial \epsilon} \quad \text{et} \quad W(\epsilon) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr} \epsilon)^2 + \mu(\text{tr} \epsilon^2).$$

### 1.5.3 Les différentes formulations considérées

On se propose de présenter les différentes formulations utilisées au cours des problèmes que nous aurons à traiter, à savoir la formulation forte, la formulation faible basée sur le principe des puissances virtuelles et la formulation de type énergétique. Dans un premier temps, nul n'est besoin de considérer le contact.

### Formulation forte

Le modèle mathématique traduisant la position d'équilibre du corps élastodynamique sans contact s'écrit :

**Problème  $\mathcal{M}$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de contraintes  $\mathbf{\Pi} : \Omega \rightarrow \mathbb{M}^d$  tels que*

$$(1.68) \quad \mathbf{\Pi}(t) = \partial_{\mathbf{F}} W(\mathbf{F}(t)) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T],$$

$$(1.69) \quad \operatorname{div} \mathbf{\Pi}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T],$$

$$(1.70) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{\Gamma_1} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T],$$

$$(1.71) \quad \mathbf{\Pi}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T],$$

$$(1.72) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1 \quad \text{dans } \Omega.$$

La loi de comportement non linéaire figurant dans (1.68), représentée par  $\mathbf{\Pi}$ , est définie à partir du gradient de déformation  $\mathbf{F} = \nabla \varphi = \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{u}$ . L'équation (1.69) représente l'équation de mouvement, analogue à celle déjà présentée en (1.4). On désigne par  $\mathbf{u}_{\Gamma_1}$  le déplacement imposé sur la frontière  $\Gamma_1$ , par  $\mathbf{u}_0$  la déplacement initial et par  $\mathbf{u}_1$  la vitesse initiale. Ici,  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_2$  désignent toujours respectivement les forces volumiques et surfaciques.

Pour un contact de type unilatéral couplé à une loi de frottement de Coulomb, le problème prend la forme

**Problème  $\mathcal{M}_c$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de contraintes  $\mathbf{\Pi} : \Omega \rightarrow \mathbb{M}^d$  tels que*

$$(1.73) \quad \mathbf{\Pi}(t) = \partial_{\mathbf{F}} W(\mathbf{F}(t)) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T],$$

$$(1.74) \quad \operatorname{div} \mathbf{\Pi}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T],$$

$$(1.75) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{\Gamma_1} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T],$$

$$(1.76) \quad \mathbf{\Pi}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T],$$

$$(1.77) \quad \left. \begin{array}{l} u_\nu \leq 0, \quad \Pi_\nu \leq 0, \\ u_\nu \Pi_\nu = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T],$$

$$(1.78) \quad \left. \begin{array}{l} \|\mathbf{\Pi}_\tau\| \leq \mu |\Pi_\nu|, \\ -\mathbf{\Pi}_\tau = \mu |\Pi_\nu| \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} \quad \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}. \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T],$$

$$(1.79) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour rappel, les conditions de contact avec frottement (1.77) et (1.78) sont équivalentes à

$$(1.80) \quad -\Pi_\nu \in \partial\Psi_{\mathbb{R}_-}(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(1.81) \quad -\Pi_\tau \in \partial\Psi_{C(\mu|\sigma_\nu|)}^*(\dot{\mathbf{u}}_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

où  $C(\mu|\sigma_\nu|)$  renvoie au disque de Coulomb de rayon  $\mu|\sigma_\nu|$ .

### Formulation faible

Nous nous intéressons à présent à la formulation variationnelle des problèmes  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_c$ . En multipliant l'équation de mouvement par la fonction test  $\mathbf{v}$ , en intégrant le résultat sur  $\Omega \times [0, T]$  et en utilisant la formule de Green suivante

$$(1.82) \quad \int_{\Omega} \Pi : \nabla \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \text{Div } \Pi \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Gamma} \Pi \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, da$$

nous obtenons

**Problème  $\mathcal{M}_V$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ , un champ de contraintes  $\Pi : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^d$  tels que*

$$(1.83) \quad \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \Pi : \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da, \\ \forall \mathbf{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_{acc}^*(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_{int}^*(\mathbf{v}) = \mathcal{P}_{ext}^*(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{P}_{acc}^*(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dx,$$

$$\text{et} \quad \mathcal{P}_{int}^*(\mathbf{v}) = \langle A(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} = \int_{\Omega} \Pi : \nabla \mathbf{v} \, dx,$$

$$\text{et} \quad \mathcal{P}_{ext}^*(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da,$$

et de plus

$$(1.84) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1.$$

Le premier terme du membre de gauche de l'équation (1.83) représente la puissance virtuelle des accélérations, le second terme du membre de gauche est associé à la

puissance virtuelle des efforts intérieurs et le second membre désigne la puissance virtuelle des efforts extérieurs.

Nous introduisons maintenant une formulation variationnelle hybride du problème  $\mathcal{M}_c$  dans laquelle les variables duales  $\lambda_\nu$  et  $\boldsymbol{\lambda}_\tau$ , correspondant aux multiplicateurs de Lagrange, sont liées aux forces de contact et de frottement. Dans ce cas, les multiplicateurs de Lagrange vérifient l'extension des inclusions sous-différentielles obtenues à partir des inclusions sous-différentielles ponctuelles rappelées dans (1.80) et (1.81). Ainsi, nous considérons les espaces de trace  $X_\nu = \{v_\nu|_{\Gamma_3} : \mathbf{v} \in V\}$  et  $X_\tau = \{v_\tau|_{\Gamma_3} : \mathbf{v} \in V\}$ , munis de leurs normes usuelles. Nous désignons par  $Y_\nu$  et  $Y_\tau$  les espaces duals de  $X_\nu$  et  $X_\tau$ , respectivement (cf [22, 27, 81] pour plus de détails). Notons en particulier que  $\lambda_\nu$  et  $\boldsymbol{\lambda}_\tau$  peuvent être représentées comme des éléments de  $H^{-1/2}(\Gamma_3)$ , si la frontière de  $\Omega$  est suffisamment régulière. De plus, nous désignons par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y_\nu, X_\nu}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y_\tau, X_\tau}$  les produits de dualités correspondants.

**Problème  $\mathcal{M}_{Vc}$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ , un champ de contraintes normales  $\lambda_\nu : [0, T] \rightarrow Y_\nu$  et un champ de contraintes tangentielles  $\boldsymbol{\lambda}_\tau : [0, T] \rightarrow Y_\tau$  tels que*

$$\mathcal{P}_{acc}^*(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_{int}^*(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_{cont}^*(\mathbf{v}) = \mathcal{P}_{ext}^*(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{P}_{cont}^*(\mathbf{v}) = \langle \lambda_\nu(t), v_\nu \rangle_{Y_\nu, X_\nu} + \langle \boldsymbol{\lambda}_\tau(t), v_\tau \rangle_{Y_\tau, X_\tau},$$

$$\text{et} \quad \lambda_\nu(t) \in \partial \varphi_\nu(u_\nu(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$\text{et} \quad \boldsymbol{\lambda}_\tau(t) \in \partial \varphi_\tau(\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

avec

$$(1.85) \quad \varphi_\nu(v_\nu(t)) = \int_{\Gamma_3} \Psi_{\mathbb{R}_-}(v_\nu(t)) da \quad \forall v_\nu \in X_\nu,$$

$$(1.86) \quad \varphi_\tau^*(\mathbf{v}_\tau(t)) = \int_{\Gamma_3} \Psi_{C(\mu|\lambda_\nu)}^*(\mathbf{v}_\tau(t)) da \quad \forall \mathbf{v}_\tau \in X_\tau.$$

Le terme supplémentaire  $\mathcal{P}_{cont}^*$  représente la puissance virtuelle des efforts de contact. De plus

$$(1.87) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1$$

### Formulation de type minimisation de l'énergie

Dans cette partie, nous allons présenter une formulation de type minimisation de l'énergie dans le cadre d'un processus de type incrémental associé au problème



hyperélastique  $\mathcal{M}_{Vc}$ . Soient  $\phi(\Omega)$  et  $\phi_{acc}(\Omega)$ , les énergies internes de déformation et d'accélération associées au corps  $\Omega$ , respectivement, et définies comme suit

$$(1.88) \quad \phi(\varphi) = \int_{\Omega} W(\nabla \varphi(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x},$$

$$(1.89) \quad \phi_{acc}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho [\delta \mathbf{u}_n]^2 d\mathbf{x},$$

avec  $W$ , la densité d'énergie hyperélastique du milieu  $\Omega$  et  $\delta \mathbf{u}_n$  la vitesse discrète donnée par

$$(1.90) \quad \delta \mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}.$$

De là, on peut définir l'énergie potentielle globale  $I_e$  du système pour un corps  $\Omega$  soumis à des forces conservatrices volumiques de densité  $\mathbf{f}_0$  et surfaciques de densité  $\mathbf{f}_2$

$$(1.91) \quad I_e(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \phi(\varphi) + \phi_{acc}(\varphi) - \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) da,$$

avec  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$ . Si on ne tient pas compte de la contribution du contact,  $\mathbf{u}$  satisfait le problème de minimisation incrémentale sur  $\Omega$  suivant

$$(1.92) \quad I_e^{\Omega}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} I_e(\mathbf{v}),$$

où  $\mathbf{V}$  désigne le champ des déplacements cinématiquement admissibles. On se propose à présent d'inclure dans la formulation de type minimisation de l'énergie précédente les lois de contact unilatéral et de frottement de Coulomb sous la forme des inclusions sous-différentielles (1.20) et (1.37). Considérons l'énergie potentielle totale  $I_{Syst}$  du problème hyperélastique avec contact, représentée par la somme du potentiel hyperélastique  $I_e^{\Omega}$  et d'un pseudo potentiel  $I_c$ , relatif aux lois de contact et de frottement, i.e.

$$(1.93) \quad I_{Syst}(\mathbf{u}; \tau_n) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} I_{Syst}(\mathbf{v}; \tau_n),$$

avec

$$(1.94) \quad I_{Syst}(\mathbf{v}; \tau_n) = I_e^{\Omega}(\mathbf{v}) + I_c(\mathbf{v}; \tau_n),$$

où

$$(1.95) \quad I_c(\mathbf{v}; \tau_n) = \int_{\Gamma_3} \Psi_{\mathbb{R}^-}(\mathbf{v}_{\nu}) da + \int_{\Gamma_3} \Psi_{C[\tau_n(\mathbf{u})]}^*(\delta \mathbf{v}_{\tau_n}) da.$$

La première intégrale renvoie à la contrainte normale associée au contact unilatéral. Elle traduit le fait qu'une énergie infinie est nécessaire pour induire la moindre pénétration. La seconde intégrale représente l'énergie dissipée du fait de la présence du frottement. Notons toutefois une spécificité dans ce problème de minimisation : le disque de Coulomb est fonction de la contrainte normale de contact, notée ici  $\tau_n$ , qui est elle-même fonction de la solution  $\mathbf{u}$ . De ce fait, on parle de problème quasi-variationnel pour désigner (1.93).



# Chapitre 2

## Analyse fonctionnelle

Nous nous proposons d'introduire, dans un premier temps, l'ensemble des espaces fonctionnels utilisés dans le cadre de cette thèse qui sera suivi de quelques résultats d'analyse non-linéaire. Nous revenons en particulier sur les différentes classes d'opérateurs étudiés, quelques définitions inhérentes à la notion de sous-différentiel, un certain nombre de résultats abstraits d'existence et plusieurs versions du Lemme de Grönwall qui s'avèreront particulièrement utiles dans la suite de ce manuscrit. Dans ce qui suit,  $\Omega$  est considéré comme un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d=2,3$ ), et sa frontière  $\Gamma$  peut être considérée comme étant localement le graphe d'une fonction continue de Lipschitz. Par ailleurs, nous supposons que  $\Gamma$  se décompose de la manière suivante :  $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \overline{\Gamma}_3$  de telle sorte que  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  avec  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  mesurables et  $\text{mes} \Gamma_1 > 0$ . Notons par  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  l'adhérence de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

### 2.1 Espaces fonctionnels

#### 2.1.1 Espaces $C^m(\overline{\Omega})$

Soit  $C(\overline{\Omega})$  l'espace des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$ .  $C(\overline{\Omega})$  est un espace de Banach dont la norme est la suivante :

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup \{|v(x)| : x \in \Omega\} \equiv \max \{|v(x)| : x \in \overline{\Omega}\}.$$

Soient  $x = (x_1, \dots, x_d)$  un élément de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  une collection d'entiers non négatifs tels que  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ , nous posons

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Qui nous conduit à la définition de  $C^m(\overline{\Omega})$ .

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}.$$

L'espace  $C^m(\overline{\Omega})$  est un espace de Banach dont la norme est donnée par

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Par ailleurs, nous définissons l'espace des fonctions infiniment différentiables par

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \in C^m(\overline{\Omega}) \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Le support d'une fonction  $v$  sur  $\Omega$  est défini par  $\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}$  et  $C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } v \subset \Omega\}$ .

**Les espaces  $C(\mathbb{R}_+; X)$ .**  $C(\mathbb{R}_+; X)$  peut être organisé canoniquement comme un espace de Fréchet (voir [48, 99]). Par ailleurs, la convergence d'une suite  $(x_k)_k$  vers un élément  $x$  dans l'espace  $C(\mathbb{R}_+; X)$  est décrite par

$$(2.1) \quad \begin{cases} x_k \rightarrow x \text{ dans } C(\mathbb{R}_+; X) & \text{lorsque } k \rightarrow \infty \text{ si et seulement si} \\ \max_{r \in [0, n]} \|x_k(r) - x(r)\|_X \rightarrow 0 & \text{lorsque } k \rightarrow \infty, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Pour une partie  $K \subset X$  nous utilisons la notation  $C(\mathbb{R}_+; K)$  afin de désigner l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $K$ . En outre, la convergence d'une suite  $(x_k)_k$  vers un élément  $x$ , dans l'espace  $C^1(\mathbb{R}_+; X)$ , signifie que :

$$(2.2) \quad \begin{cases} x_k \rightarrow x \text{ dans } C^1(\mathbb{R}_+; X) & \text{lorsque } k \rightarrow \infty \text{ si et seulement si} \\ x_k \rightarrow x \text{ dans } C(\mathbb{R}_+; X) \text{ et } \dot{x}_k \rightarrow \dot{x} \text{ dans } C(\mathbb{R}_+; X) & \text{lorsque } k \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Nous reviendrons sur ce résultat dans le Chapitre 5.

### 2.1.2 Espaces $L^p$

Pour  $p \in [1, \infty[$ ,  $L^p(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ .

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess}|v(x)| < \infty,$$

il est également de Banach.

Soit  $p \in [1, \infty]$  : alors le conjugué de  $p$ , noté  $q$ , est défini par

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 & \text{si } p \neq 1, \\ q = \infty & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Il existe alors une dualité entre les espaces d'exposants  $p$  et  $q$ .

**Inégalité de Hölder.** Soient  $u \in L^p(\Omega)$  et  $v \in L^q(\Omega)$ . Alors

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Il est possible de la voir comme une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz quand  $p \neq 2$ .

### 2.1.3 Espaces de Sobolev

Soient  $k \in \mathbb{N}$  et soit  $p \in [1, \infty]$ . Nous définissons les espaces de Sobolev par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \mathcal{D}^\alpha(u) \in L^p(\Omega) \text{ avec } 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

qui sont des espaces de Banach. La norme sur  $W^{k,p}(\Omega)$  est définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Ici,  $W^{k,2}(\Omega)$  sera noté par  $H^k(\Omega)$ , qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} \mathcal{D}^\alpha u(x) \mathcal{D}^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev nous pouvons nous référer à [3, 34, 52, 109].

### 2.1.4 Espaces fonctionnels en mécanique

Dans l'ensemble des problèmes mécaniques traités, en plus des notations utilisées dans le premier Chapitre, nous devons nous munir des espaces suivants

$$\begin{aligned} Q &= \{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \}, \\ H_1 &= \{ \mathbf{u} = (u_i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in Q \}, \\ Q_1 &= \{ \boldsymbol{\sigma} \in Q : \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d \}, \\ V &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \}, \\ \mathbf{Q}_\infty &= \{ \mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) \mid \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d \}. \end{aligned}$$

Les espaces  $Q$ ,  $H_1$ ,  $Q_1$  et  $V$  sont des espaces de Hilbert réels dotés des produits scalaires respectifs suivants

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} &= (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{Q_1} &= (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \text{Div } \boldsymbol{\tau})_{L^2(\Omega)^d}, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx, \end{aligned}$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\text{Div}$  sont respectivement l'opérateur de déformation linéarisé et l'opérateur de divergence, déjà définis en (1.3). On désigne les normes associées par  $\| \cdot \|_Q$ ,  $\| \cdot \|_{H_1}$ ,  $\| \cdot \|_{Q_1}$  et  $\| \cdot \|_V$  respectivement. Rappelons également que  $H_1 = H^1(\Omega)^d = W^{1,2}(\Omega)^d$ .

Notons que  $\mathbf{Q}_\infty$  est un espace de Banach réel muni de la norme

$$\| \mathcal{E} \|_{\mathbf{Q}_\infty} = \sum_{0 \leq i, j, k, l \leq d} \| \mathcal{E}_{ijkl} \|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Par ailleurs, un calcul élémentaire montre que

$$(2.3) \quad \| \mathcal{E} \boldsymbol{\tau} \|_Q \leq \| \mathcal{E} \|_{\mathbf{Q}_\infty} \| \boldsymbol{\tau} \|_Q \quad \forall \mathcal{E} \in \mathbf{Q}_\infty, \boldsymbol{\tau} \in Q.$$

Pour tout élément  $\mathbf{v} \in H_1$ ,  $v_\nu$  et  $\mathbf{v}_\tau$  représentent respectivement les composantes normale et tangentielle  $\mathbf{v}$  sur  $\Gamma$  données par  $v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}$ ,  $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}$ .

La complétude de l'espace  $(V, \| \cdot \|_V)$  provient de l'hypothèse  $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ , rendant possible l'utilisation de l'inégalité de Korn, à savoir l'existence d'un  $c_0 > 0$  dépendant de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  tel que

$$(2.4) \quad \| \mathbf{v} \|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \leq c_0 \| \mathbf{v} \|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Cette inégalité découle du théorème de trace de Sobolev.

De même, il existe  $C_K$  dépendant de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$ ,

$$(2.5) \quad \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_Q \geq C_K \|\mathbf{v}\|_{H_1} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Notons en particulier que

$$(2.6) \quad \|\mathbf{v}\|_V = \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_Q \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Par suite, grâce à (2.5) et (2.6),  $\|\cdot\|_{H_1}$  et  $\|\cdot\|_V$  sont équivalentes sur  $V$  et de ce fait  $(V, \|\cdot\|_V)$  est un espace de Hilbert réel. En outre, puisque

$$(2.7) \quad \|\mathbf{v}\|_{H_1} = (\|\mathbf{v}\|_H^2 + \|\mathbf{v}\|_V^2)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in H_1,$$

nous obtenons

$$(2.8) \quad \|\mathbf{v}\|_V \geq C_K \|\mathbf{v}\|_H \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Le produit de dualité entre  $V$  et  $V^*$ , à savoir l'espace dual de  $V$ , est désigné par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Nous avons alors la double inclusion  $V \subset H \subset V^*$  avec un prolongement dense, continu et compact. Dans ce qui suit, nous avons recours aux espaces  $\mathcal{V} = L^2(0, T; V)$ ,  $\mathcal{V}^* = L^2(0, T; V^*)$ ,  $\mathcal{H} = L^2(0, T; H)$ , à savoir l'espace des fonctions mesurables de  $[0, T]$  dans  $V$  (respectivement  $V^*$ ,  $H = L^2(\Omega)^d$ ) de carré intégrable et  $\mathcal{W} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}^*\}$ , équipé de sa norme  $\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{W}} = (\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\dot{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{V}^*}^2)^{1/2}$ .

Enfin, nous rappelons la formule de Green suivante :

$$(2.9) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, da \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d,$$

formule qui s'avérera particulièrement utile pour obtenir la formulation variationnelle des problèmes de contact traités dans les Chapitres à venir. Précisons d'ailleurs qu'il s'agit simplement d'une extension au cas multidimensionnel de la formule d'intégration par partie bien connue.

## 2.2 Analyse non linéaire

### 2.2.1 Classe des opérateurs

Soit  $X$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme  $\|\cdot\|_X$ . D'après [136, p.19-20] et par définition



**Définition 2.1.** Un opérateur  $A : X \rightarrow X$  est dit :

(1) *monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

(2) *strictement monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X > 0 \quad \forall u, v \in X, u \neq v;$$

(3) *non expansif si*

$$\|Au - Av\|_X \leq \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X;$$

(4) *fortement monotone s'il existe  $m > 0$  tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X;$$

(5) *de Lipschitz s'il existe  $M > 0$  tel que*

$$\|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X;$$

(6) *hémicontinu si pour toute suite  $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$  telle que  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ , nous avons*

$$(A(u + \alpha_n v), w)_X \rightarrow (A(u + \alpha v), w)_X;$$

(7) *continu si*

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } X \implies Au_n \rightarrow Au \text{ dans } X.$$

Les opérateurs de projections présentent quelques intérêts dans les problèmes qui vont suivre ; on se propose de les présenter rapidement.

**Définition 2.2.** Soit  $K$  un sous-ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Hilbert  $X$ . Pour tout  $f \in X$ , l'unique élément  $u \in K$  qui vérifie

$$\|u - f\|_X = \min_{v \in K} \|v - f\|_X$$

est appelé la projection de  $f$  sur  $K$  et il est noté par  $P_K f$ . Par ailleurs, l'opérateur  $P_K : X \rightarrow K$  est appelé l'opérateur de projection sur  $K$ .

**Proposition 2.3.** *Soit  $K$  un sous-ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Hilbert  $X$ ,  $f$  et  $v$ , deux vecteurs de  $K$ , et  $P_K f$ , le projecteur de  $f$  sur  $K$ . Nous avons alors*

$$(2.10) \quad (P_K f - f, P_K f - v) \leq 0, \quad \forall v \in K,$$

dont la démonstration figure dans [136, p.13]. Nous y reviendrons dans le Chapitre 6.

Nous introduisons à présent le lemme d'Ehrling, dont la preuve figure dans [139].

**Lemme 2.4.** *Soit  $X_0$ ,  $X$  et  $X_1$  trois espaces de Banach tels que*

$$X_0 \subset X \subset X_1,$$

*que l'injection de  $X$  dans  $X_1$  soit continue et que l'injection de  $X_0$  dans  $X$  soit compacte. Alors, pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C(\varepsilon)$  telle que*

$$\|v\|_X \leq \varepsilon \|v\|_{X_0} + C(\varepsilon) \|v\|_{X_1}, \quad \forall v \in X_0.$$

**Opérateurs de mémoire.** Il s'agit d'une classe d'opérateur intervenant dans l'étude de problèmes évolutifs.

**Définition 2.5.** Soient  $(X, \|\cdot\|_X)$  et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$ , deux espaces vectoriels normés et un opérateur  $\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+, Y)$ . L'opérateur  $\mathcal{R}$  est qualifié d'opérateur de mémoire si

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ Il existe } r_n > 0 \text{ tel que} \\ \| \mathcal{R}u_1(t) - \mathcal{R}u_2(t) \|_Y \leq r_n \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \\ \forall u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+, X), \forall t \in [0, n]. \end{array} \right.$$

Nous terminons avec deux exemples d'opérateurs de mémoire classiques tirés de [136] sur lesquels nous reviendrons dans le Chapitre 5.

**Exemple 2.6.**

Soient  $(X, \|\cdot\|_X)$ , un espace vectoriel normé,  $u_0 \in X$  et considérons un opérateur  $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$  défini par

$$(2.12) \quad \mathcal{S}v(t) = \int_0^t v(s)ds + u_0, \quad \forall v \in C(\mathbb{R}_+; X), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Alors, si  $u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+; X)$ , nous avons

$$(2.13) \quad \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_X \leq \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds.$$

$\mathcal{S}$  est donc, par définition, un opérateur de mémoire.

**Exemple 2.7.** Soient  $(X, \|\cdot\|_X)$  et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$ , deux espaces vectoriels normés et un opérateur  $\mathcal{K} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(X, Y))$  donné. Considérons l'opérateur de Volterra  $\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$  défini par

$$(2.14) \quad \mathcal{R}v(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t-s)v(s)ds \quad \forall v \in C(\mathbb{R}_+; X), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Alors, si  $u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+; X)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}u_1(t) - \mathcal{R}u_2(t)\|_X &\leq \int_0^t \|\mathcal{K}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \\ &\leq \max_{t \in [0,n]} \|\mathcal{K}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds. \end{aligned}$$

Par suite, en posant  $r_n = \max_{t \in [0,n]} \|\mathcal{K}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ , on a que  $\mathcal{R}$  est également un opérateur de mémoire.

## 2.2.2 Sous-différentiel

Ici, nous présentons quelques notions afférentes au sous-différentiel au sens de l'analyse convexe.

**Définition 2.8.** Soit  $X$  un espace vectoriel et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que la fonction  $f$  est propre si  $f(v) > -\infty$  pour tout  $v \in X$  et  $\text{dom}(f) \neq \emptyset$  où  $\text{dom}(f) = \{v \in X | f(v) \neq \infty\}$ . Elle est convexe si

$$f((1-t)u + tv) \leq (1-t)f(u) + tf(v)$$

pour tout  $u, v \in X$  et  $t \in ]0, 1[$ .

**Définition 2.9.** Soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace vectoriel normé,  $K$  un sous-ensemble convexe fermé non vide de  $X$  et  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  est dite

(1) semi-continue inférieurement si pour tout  $u \in X$  et pour toute suite  $\{u_n\} \subset K$  qui converge vers  $u$  dans  $X$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u).$$

(2) faiblement semi-continue inférieurement si pour tout  $u \in X$  et pour toute suite  $\{u_n\} \subset K$  qui converge faiblement vers  $u$  dans  $X$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u).$$

Le résultat suivant montre le lien entre ces propriétés dans le cas des fonctions convexes.

**Proposition 2.10.** *Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction propre et convexe alors  $f$  est dite semi-continue inférieurement si et seulement si elle est faiblement semi-continue inférieurement.*

Le sous-différentiel d'une fonction convexe est défini ci-dessous.

**Définition 2.11.** *Soit  $X$  un espace réel normé,  $X'$  son dual, et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $u \in X$  tel que  $f(u) \neq \pm\infty$ . Le sous-différentiel de  $f$  en  $u$  est défini par l'ensemble*

$$\partial f(u) = \{u' \in X' : f(v) \geq f(u) + (u', v - u)_{X' \times X} \quad \forall v \in X\}.$$

Tout élément  $u' \in \partial f(u)$  de l'ensemble  $\partial f(u)$  est appelé sous-gradient de la fonction  $f$  en  $u$ . La fonction  $f$  est dite sous différentiable en  $u$  si  $\partial f(u) \neq \emptyset$ . Elle est sous différentiable si elle l'est en tout point de l'espace  $X$ .

**Remarque 2.12.**

1) Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , le sous-différentiel de  $f$  en  $u$  est l'ensemble des pentes des droites passant par le point  $(u, f(u))$  se situant au dessous de la courbe de  $f$ . En particulier si  $f'$  existe alors  $\partial f(u) = \{f'(u)\}$ .

2) Soit  $X$  un espace vectoriel normé et  $K$  un sous-ensemble convexe non vide de  $X$ . Le sous-différentiel  $\partial \psi_K(u)$  de la fonction indicatrice  $\psi_K$  est caractérisé par

$$\partial \psi_K(u) = \{u' \in X' : (u', v - u)_{X' \times X} \leq 0 \quad \forall v \in X\}.$$

Par ailleurs si  $u \in \text{int}(K)$  alors  $\partial \psi_K(u) = \{0\}$ .

Rappelons aussi la notion de fonction conjuguée et celle de fonction Gâteaux différentiable qui seront utilisées par la suite.

**Définition 2.13.** Soient  $X$  un espace vectoriel et  $X'$  son dual. Considérons la fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonction conjuguée au sens de Fenchel est définie par

$$f^*(y) = \sup_{x \in X} \{(x, y)_{X' \times X} - f(x)\} \quad \forall y \in X'.$$

**Définition 2.14.** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $u \in X$  tel que  $f(u) \in \mathbb{R}$ .  $f$  est Gâteaux différentiable en  $u$  s'il existe  $u' \in X'$  tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = (u', v)_{X' \times X} \quad \forall v \in X.$$

$u'$  est unique et est appelé la dérivée Gâteaux de  $f$  en  $u$  notée  $f'(u)$ .

Enfin, nous terminons par une définition succincte du sous-différentiel de Clarke, utilisé dans le Chapitre 6

**Définition 2.15.** Soient  $X$ , un espace de Banach, et  $X'$  son dual. La dérivée directionnelle généralisée d'une fonction localement lipschitzienne  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  au point  $x \in X$  dans la direction  $v \in X$ , notée par  $f^0(x; v)$  est définie par

$$f^0(x; v) = \limsup_{y \rightarrow x, \lambda \downarrow 0} \frac{f(y + \lambda v) - f(y)}{\lambda}.$$

Le sous-différentiel de Clarke de  $f$  au point  $x$ , désigné par  $\partial f(x)$ , est alors un sous-ensemble de  $X'$  donné par  $\partial f(x) = \{\zeta \in X' : f^0(x; v) \geq (\zeta, v)_{X' \times X} \text{ pour tout } v \in X\}$ . Soit  $\|\zeta\|'$ , la norme de  $\zeta$  dans  $X'$  :

$$\|\zeta\|' := \sup\{(\zeta, v)_{X' \times X} : v \in X, \|v\| \leq 1\}.$$

Notons d'ailleurs que nous utiliserons indifféremment la notation " $\partial$ " pour le sous-différentiel de Clarke et pour celui au sens de l'analyse convexe. Un tel choix ne sera source d'aucune ambiguïté dans la mesure où le sens de la notation dépend du contexte dans lequel elle est utilisée. Plus de détails sur le sujet peuvent être trouvés dans [46, 108].

### 2.2.3 Inéquations variationnelles

Nous énonçons maintenant un résultat concernant une classe d'inéquations variationnelles.

**Théorème 2.16.** *Soit  $X$  un espace de Hilbert et supposons que  $K$  est une partie convexe fermée de  $X$  telle que  $0_X \in K$ , soient  $A : X \rightarrow X$ , un opérateur continu Lipschitzien fortement monotone, et  $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction satisfaisant les conditions suivantes :*

$$(2.15) \quad \begin{cases} \text{Pour tout } \eta \in K, \text{ la fonction } v \mapsto j(\eta, v) : K \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{est convexe, } j(\eta, v) \geq 0 \text{ pour tout } v \in K \text{ et } j(\eta, 0_X) = 0. \end{cases}$$

$$(2.16) \quad \begin{cases} \text{Pour toute suite } \{\eta_n\} \subset K \text{ et } \{u_n\} \subset K \text{ telles que} \\ \eta_n \rightharpoonup \eta \text{ dans } X, u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X \text{ et pour tout } v \in K, \\ \text{l'inégalité suivante est vérifiée :} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, v) - j(\eta_n, u_n)] \leq j(\eta, v) - j(\eta, u). \end{cases}$$

Alors, pour tout  $f \in X$  il existe au moins une solution à l'inégalité variationnelle ci dessous

$$(2.17) \quad u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Le Theorème 2.16 sera utilisé dans le Chapitre 4 afin de prouver l'existence d'une solution faible pour notre modèle de contact. Sa démonstration figure dans [136, p. 51] et est basée sur le théorème du point fixe de Schauder. Notez bien que ce théorème seul ne suffit pas à garantir l'unicité, nous n'avons que l'existence à ce stade.

Nous proposons également un résultat concernant une autre classe d'inéquations variationnelles.

**Théorème 2.17.** *Soit  $X$ , un espace de Hilbert réel muni d'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et d'une norme associée  $\|\cdot\|_X$ . Soit  $K$ , une partie de  $X$  et considérons les opérateurs  $A : K \rightarrow X$ ,  $\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$  ainsi que les fonctions  $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  tels que :*

$$(2.18) \quad K \text{ est une partie convexe fermée non vide de } X.$$

$$(2.19) \quad \begin{cases} (a) \text{ Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ (Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in K. \\ (b) \text{ Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K. \end{cases}$$

$$(2.20) \quad \begin{cases} \text{Pour chaque } n \in \mathbb{N} \text{ il existe } r_n > 0 \text{ tel que} \\ \| \mathcal{R}u(t) - \mathcal{R}v(t) \|_X \leq r_n \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ \forall u, v \in C(\mathbb{R}_+; X), \quad \forall t \in [0, n]. \end{cases}$$

$$(2.21) \quad \begin{cases} (a) \text{ La fonction } j(u, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et} \\ \text{semi-continue inférieure, pour tout } u \in K. \\ (b) \text{ Il existe } \alpha \geq 0 \text{ tel que} \\ j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_Y \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in K. \end{cases}$$

$$(2.22) \quad f \in C(\mathbb{R}_+; X).$$

Si  $m > \alpha$  alors il existe une unique fonction  $w \in C(\mathbb{R}_+; K)$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$(2.23) \quad \begin{aligned} (Aw(t), v - w(t))_X + (\mathcal{R}w(t), v - w(t))_X \\ + j(w(t), v) - j(w(t), w(t)) \geq (f(t), v - w(t))_X \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Le Théorème 2.17 est démontré dans [137]. Il sera utilisé dans le Chapitre 5 afin de prouver l'unicité de la solution faible de notre problème de contact. Nous avons vu en (2.11) que (2.20) est désigné sous l'appellation opérateur de mémoire. De ce fait, (2.23) représente une inégalité quasivariationnelle avec terme mémoire.

## 2.2.4 Lemmes de Grönwall

Nous introduisons ensuite plusieurs versions du Lemme de Grönwall, qui s'avéreront particulièrement utiles dans la suite de ce manuscrit.

### **Lemme 2.18. (lemme de Grönwall, forme intégrale)**

Soient  $f$  et  $g \in C([0, T], \mathbb{R})$ . Supposons qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Si  $g$  est non décroissante, nous avons que

$$f(t) \leq g(t) e^{ct} \quad \forall t \in [0, T].$$

Une preuve du Lemme 2.18 peut être trouvée dans [136].

**Lemme 2.19.** (*lemme de Grönwall, forme discrète*)

Soient  $T > 0$ , donné, et  $N > 0$ , un entier. On définit  $k = T/N$ . Supposons que  $\{g_n\}_{n=1}^N$  et  $\{e_n\}_{n=1}^N$  sont deux suites de nombres non négatifs satisfaisant

$$e_n \leq \bar{c} g_n + \bar{c} \sum_{j=1}^n k e_j \quad n = 1, \dots, N,$$

avec  $\bar{c}$ , une constante positive indépendante de  $N$  et  $k$ . Alors, si  $k$  est suffisamment petit, il existe une constante positive  $c$ , indépendante de  $N$  et  $k$ , telle que

$$\max_{1 \leq n \leq N} e_n \leq c \max_{1 \leq n \leq N} g_n.$$

Une preuve du Lemme 2.19 peut être trouvée dans [56].





# Chapitre 3

## Méthodes numériques

Dans ce Chapitre, nous allons rappeler les différentes méthodes numériques existants dans la littérature et utilisées dans les Chapitres à venir. Les extensions de ces méthodes aux problèmes étudiés seront, le cas échéant, présentées dans les Chapitres concernés. Nous commençons par rappeler succinctement le principe de la méthode du Lagrangien augmenté [6] pour la résolution de problèmes avec contact unilatéral et frottement de Coulomb entre un solide déformable hyperélastique et un corps rigide (notons que le cas de l'élasticité linéaire peut être vu comme un cas particulier). Afin d'éviter une redondance des équations, les conditions de contact ne seront pas réécrites dans le cadre des grandes déformations. Il est à noter que nous aurons recours à cette méthode tout au long de ce manuscrit. Ensuite, nous étudierons une méthode de type Active set [68, 69, 71, 72] pour la résolution de problèmes avec contact unilatéral que nous aborderons au Chapitre 7. Enfin, nous conclurons ce Chapitre par la présentation de quelques méthodes de type conservation de l'énergie [13, 62, 80, 81] nécessaire à la compréhension du Chapitre 8.

### 3.1 Méthode du quasi-Lagrangien augmenté

Notons que nous adoptons dans cette section un formalisme lié à des problèmes statiques ou quasi-statiques découlant de processus incrémentaux. Cette méthode fut décrite en particulier dans [6] et reste encore aujourd'hui très populaire, comme peuvent en témoigner les travaux [88, 143]. Nous commençons par traiter le cas du contact unilatéral seul auquel nous combinons, dans un second temps, le frottement de Coulomb. Considérons ensuite  $\{\mathcal{T}^h\}$ , une famille d'éléments finis réguliers de  $\overline{\Omega}$  compatible avec la frontière  $\Gamma = \overline{T_1} \cup \overline{T_2} \cup \overline{T_3}$ , i.e., si un côté d'un élément  $Tr \in \mathcal{T}^h$  comprend plus

d'un point reposant sur la frontière  $\Gamma$ , alors ce même côté repose entièrement sur  $\overline{\Gamma_1}$ ,  $\overline{\Gamma_2}$  ou  $\overline{\Gamma_3}$ . L'espace  $V$  est approximé par  $V^h \subset V$ , un sous-espace d'éléments finis de fonctions linéaires par morceaux, à savoir,

$$V^h = \{ \mathbf{v}^h \in [C(\overline{\Omega})]^d : \mathbf{v}^h|_{Tr} \in [P_1(Tr)]^d \quad \forall Tr \in \mathcal{T}^h, \quad \mathbf{v}^h = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \},$$

où  $P_1(Tr)$  représente l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à un dans  $Tr$  et  $h > 0$  désigne le paramètre de discrétisation spatiale. Pour la discrétisation des termes associés au contact normal, nous considérons l'espace  $X_\nu^h = \{ v_\nu^h|_{\Gamma_3} : \mathbf{v}^h \in V^h \}$ , équipé de sa norme usuelle. Désignons alors par  $Y_\nu^h \in L^2(\Gamma_3)$ , l'espace de fonctions constantes par morceaux associé à la discrétisation de la contrainte normale  $\lambda_\nu^h = -\sigma_\nu^h$ . De même, pour la discrétisation des termes associés au contact tangentiel, nous considérons l'espace  $X_\tau^h = \{ \mathbf{v}_\tau^h|_{\Gamma_3} : \mathbf{v}^h \in V^h \}$ , équipé de sa norme usuelle. Ainsi,  $Y_\tau^h \in L^2(\Gamma_3)$  désigne l'espace de fonctions constantes par morceaux associé à la discrétisation de la contrainte tangentielle  $\boldsymbol{\lambda}_\tau^h = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^h$ . La discrétisation de l'interface de contact est ainsi caractérisée par un espace de dimension finie  $H_{\Gamma_3}^h \in Y^h$ , où  $Y^h$  désigne  $Y_\nu^h \cup Y_\tau^h$ .

### 3.1.1 Cas du contact unilatéral

Cela conduit, dans le cas sans frottement, au problème discret suivant.

**Problème  $\mathcal{P}_{V_{Sig}}^h$ .** *Trouver un champ de déplacements discret  $\mathbf{u}^h$  et un champ de contraintes normales discret  $\boldsymbol{\lambda}^h = \lambda_\nu^h \boldsymbol{\nu}$  tels que*

$$(3.1) \quad \mathbf{u}^h \in V^h, \quad \langle A(\mathbf{u}^h), \mathbf{v}^h \rangle_{V^* \times V} + \langle \lambda_\nu^h, v_\nu^h \rangle_{Y_\nu^h, X_\nu^h} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,$$

$$(3.2) \quad \lambda_\nu^h \in \partial \varphi_\nu(u_\nu^h) \quad \text{dans } Y_\nu^h,$$

où  $A$  est l'opérateur non linéaire hyperélastique défini en (1.84). La fonction  $\varphi_\nu : X_\nu \rightarrow (-\infty, +\infty]$  correspond à celle utilisée dans (1.85). Les solutions du Problème  $\mathcal{P}_{V_{Sig}}^h$  peuvent également être obtenues à partir d'un problème de minimisation sur un ensemble convexe qui conduit à une méthode de Lagrangien augmenté sans contrainte. Considérons le problème d'optimisation suivant

$$(3.3) \quad \mathbf{u}^h = \underset{\mathbf{v}^h \in V^h}{\operatorname{argmin}} \left\{ J(\mathbf{v}^h) + \varphi_\nu(v_\nu^h) \right\},$$

où  $J(\mathbf{v}^h)$  est le potentiel de déformation hyperélastique défini par

$$(3.4) \quad J(\mathbf{v}^h) = \int_{\Omega} W(\nabla \varphi(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V}.$$

Ainsi, avec le formalisme propre au Lagrangien classique, le problème (3.4) est équivalent au problème minmax

$$(3.5) \quad (\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h) \in \arg(\min_{\mathbf{v}^h} \max_{\gamma_\nu^h \in \mathbb{R}^+} \{L(\mathbf{v}^h, \gamma_\nu^h)\}),$$

où  $\lambda_\nu^h \in Y^h \cap \mathbb{R}^+$  renvoie aux multiplicateurs de Lagrange, avec  $\gamma_\nu^h$  la variable de Lagrange virtuelle, qui représente l'opposé de la contrainte normale de contact. La fonction Lagrangienne  $L$  est définie par

$$(3.6) \quad L(\mathbf{v}^h, \gamma_\nu^h) = J(\mathbf{v}^h) + \langle v_\nu^h, \gamma_\nu^h \rangle_{X_\nu \times X'_\nu}.$$

Nous avons à présent recours à l'approche du Lagrangien augmenté, permettant ainsi l'obtention d'un problème de minimisation régulier sans contrainte. A partir de maintenant, nous considérons l'expression régularisée du Lagrangien donnée par

$$(3.7) \quad L_r(\mathbf{v}^h, \gamma_\nu^h) = J(\mathbf{v}^h) - \frac{1}{2r} \|\gamma_\nu^h\|^2 + \frac{1}{2r} [\gamma_\nu^h + r v_\nu^h]_+^2,$$

avec  $r > 0$ , un paramètre de pénalisation. Nous en déduisons le problème de minimisation suivant

$$(3.8) \quad (\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h) \in \arg(\min \{L_r(\mathbf{v}^h, \gamma_\nu^h)\}), \text{ avec } \mathbf{v}^h \in V^h \text{ et } \gamma_\nu^h \in Y_\nu^h.$$

En supposant que  $J$  est continûment différentiable et strictement convexe,  $L_r$  est continûment différentiable par rapport à  $\mathbf{v}^h$  et  $\gamma_\nu^h$  et de ce fait il existe un point-selle  $(\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h)$  vérifiant la condition de stationnarité suivante

$$(3.9) \quad \nabla_{\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h} L_r(\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h) = \mathbf{0}.$$

Cela conduit à un système d'équation non linéaire de la forme

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{u}^h} L_r(\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h) = \nabla_{\mathbf{u}^h} J(\mathbf{u}^h) + [\lambda_\nu^h + r u_\nu^h]_+ \nu = \mathbf{0}, \\ \nabla_{\lambda_\nu^h} L_r(\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h) = -\frac{1}{r} \left\{ \lambda_\nu^h - [\lambda_\nu^h + r u_\nu^h]_+ \right\} = 0. \end{cases}$$

Pour le reste de la section, afin de simplifier les notations, nous omettrons le paramètre de discrétisation  $h$ . Dans la suite,  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\lambda}$  désignent les vecteurs généralisés, définis par  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}^i\}_{i=1}^{N_{Tot}^h}$  et  $\boldsymbol{\lambda} = \{\boldsymbol{\lambda}^i\}_{i=1}^{N_{\Gamma_3}^h}$ , respectivement, où  $N_{Tot}^h$ , est le nombre de noeuds de la discrétisation de  $\Omega$  et  $N_{\Gamma_3}^h$ , le nombre de noeuds de la discrétisation de  $\Gamma_3$ . Ici,  $\mathbf{u}^i$

renvoie à la valeur de  $\mathbf{u}^h$  au  $i^{eme}$  noeud de  $\mathcal{T}^h$  tandis que  $\boldsymbol{\lambda}^i$  renvoie à la valeur de  $\boldsymbol{\lambda}^h = \lambda_\nu^h \boldsymbol{\nu}$  au  $i^{eme}$  noeud de la discrétisation de  $\Gamma_3$ , désignée par  $\Gamma_3^h$ . Ainsi, en adoptant une notation vectorielle, nous avons le système d'équations non linéaires suivant :

**Problème  $\mathcal{P}_L$ .** *Trouver un champ de déplacement  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d \times N_{Tot}^h}$  et un multiplicateur associé à la contrainte normale  $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_\nu \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{d \times N_{\Gamma_3}^h}$  tels que*

$$(3.10) \quad G(\mathbf{u}) + \mathcal{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}_{d \times N_{Tot}^h + N_{\Gamma_3}^h},$$

où  $G(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{d \times N_{Tot}^h} \times \mathbb{R}^{N_{\Gamma_3}^h}$  est la partie hyperélastique et  $\mathcal{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{d \times N_{Tot}^h} \times \mathbb{R}^{N_{\Gamma_3}^h}$  est la contribution non différentiable du contact définie par

$$G(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} A(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \\ \mathbf{0}_{N_{\Gamma_3}^h} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} [\lambda_\nu + r u_\nu]_+ \boldsymbol{\nu} \\ -\frac{1}{r} \left\{ \lambda_\nu - [\lambda_\nu + r u_\nu]_+ \right\} \end{pmatrix},$$

avec  $\mathbf{0}_{N_{\Gamma_3}^h}$ , le zéro de  $\mathbb{R}^{N_{\Gamma_3}^h}$  et  $\mathbf{0}_{d \times N_{Tot}^h + N_{\Gamma_3}^h}$  le zéro de  $\mathbb{R}^{d \times N_{Tot}^h + N_{\Gamma_3}^h}$ .

La solution du Problème non linéaire  $\mathcal{P}_L$  est basée sur une méthode de Newton généralisée permettant ainsi de traiter les deux variables  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  de façon simultanée. A présent, en considérant la paire  $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ , le schéma itératif peut être décrit ainsi.

(i) Choix de  $\mathbf{x}^0$ , posons  $k = 0$ .

(ii) Calcul de  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ , donné par

$$(3.11) \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (K_k + L_k)^{-1} (G(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathcal{F}(\mathbf{x}^{(k)})), \quad L_k \in \partial \mathcal{F}(\mathbf{x}^{(k)}),$$

où  $\partial \mathcal{F}(\mathbf{x}^{(k)})$  est la Jacobien généralisé de  $\mathcal{F}$  en  $\mathbf{x}^{(k)}$  et  $K_k$  est le Jacobien de  $G$  en  $\mathbf{x}^{(k)}$ .

(iii) Si  $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \epsilon$  et  $\|\mathcal{R}^L(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq \epsilon$  alors stop, sinon retour en (ii). Ici,  $\epsilon$  est censé être relativement petit et  $\mathcal{R}^L(\mathbf{x}^{(k)})$  est l'opérateur non linéaire appartenant à  $\mathbb{R}^{d, N_{Tot}^h} \times \mathbb{R}^{N_{\Gamma_3}^h}$ , défini par

$$\mathcal{R}^L(\mathbf{x}^{(k)}) = G(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathcal{F}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}).$$

**Remarque 3.1.** Une telle méthode requiert l'utilisation de noeuds fictifs, pour les multiplicateurs de Lagrange, associés aux éléments de contact sur  $\Gamma_3$ , pour le traitement de l'opérateur de contact  $\mathcal{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ . La construction de ces noeuds dépend de l'élément de contact utilisé pour la discrétisation géométrique de l'interface de contact  $\Gamma_3$ . Dans les exemples numériques présentés dans les Chapitres à venir, la discrétisation sera basée sur l'élément de contact "noeud-rigide", composé d'un noeud de  $\Gamma_3$  et d'un noeud multiplicateur de Lagrange.

### 3.1.2 Cas du contact unilatéral avec frottement de Coulomb

Si l'on considère à présent un frottement de type Coulomb dans un cas statique, et avec les mêmes notations, le problème discrétisé prend la forme suivante

**Problème  $\mathcal{P}_{V_{Coul}}^h$ .** *Trouver un champ de déplacements discret  $\mathbf{u}^h$ , un champ de contraintes normales discret  $\lambda_\nu^h$  et un champ de contraintes tangentielles discret  $\boldsymbol{\lambda}_\tau^h$  tels que*

$$(3.12) \quad \mathbf{u}^h \in V^h, \quad \langle A(\mathbf{u}^h), \mathbf{v}^h \rangle_{V^* \times V} + \langle \lambda_\nu^h, v_\nu^h \rangle_{Y_\nu^h, X_\nu^h} + \langle \boldsymbol{\lambda}_\tau^h, \mathbf{v}_\tau^h \rangle_{Y_\tau^h, X_\tau^h} \\ = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,$$

$$(3.13) \quad \lambda_\nu^h \in \partial \varphi_\nu(u_\nu^h) \quad \text{dans } Y_\nu^h,$$

$$(3.14) \quad \boldsymbol{\lambda}_\tau^h \in \partial \varphi_\tau^*(\mathbf{u}_\tau^h) \quad \text{dans } Y_\tau^h,$$

où la fonction  $\varphi_\tau^* : X_\tau \rightarrow (-\infty, +\infty]$  est définie par (1.86) Il convient alors d'ajouter au problème de minimisation précédent un pseudo-potentiel lié à la loi de frottement (1.35), donnant ainsi un problème d'optimisation associé au problème  $\mathcal{P}_{V_{Coul}}^h$  de la forme suivante :

$$(3.15) \quad \mathbf{u}^h = \operatorname{argmin}_{\mathbf{v}^h \in V^h} \left\{ J(\mathbf{v}^h) + \varphi_\nu(v_\nu^h) + \varphi_\tau^*(\mathbf{v}_\tau^h) \right\}.$$

Pour le cas évolutif du frottement de Coulomb, on utilisera un problème de minimisation incrémentale en considérant, par exemple, un schéma de type Euler pour la discrétisation de la vitesse. Notons qu'un tel problème n'est pas tout à fait standard dans la mesure où le disque de Coulomb  $C$  dépend de la solution  $\mathbf{u}^h$ . C'est la raison pour laquelle on parle plutôt d'un problème de quasi optimisation ; l'appellation "quasi-Lagrangien" ne se justifie véritablement que dans le cas avec frottement. Comme précédemment, nous introduisons le Lagrangien standard associé à ce problème, défini par :

$$(3.16) \quad L(\mathbf{v}^h, \gamma_\nu^h, \boldsymbol{\gamma}_\tau^h) = J(\mathbf{v}^h) + (v_\nu^h, \gamma_\nu^h) + (\mathbf{v}_\tau^h, \boldsymbol{\gamma}_\tau^h).$$

Par analogie avec le cas du contact unilatéral, le multiplicateur  $\boldsymbol{\gamma}_\tau^h$  correspond à l'opposé de la contrainte tangentielle de frottement  $\boldsymbol{\sigma}_\tau^h$  utilisée dans la loi (1.35). Le problème (3.15) est remplacé par le problème de min-max suivant :

$$\min_{\mathbf{v}^h} \max_{\gamma_\nu^h \in \mathbb{R}^+} \max_{\boldsymbol{\gamma}_\tau^h \in C(\mu|\sigma_\nu^h(\mathbf{u}^h)|)} L(\mathbf{v}^h, \gamma_\nu^h, \boldsymbol{\gamma}_\tau^h),$$

où  $\gamma_\nu^h$  et  $\boldsymbol{\gamma}_\tau^h$  représentent les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux contraintes de contact et de frottement. Afin d'obtenir un problème de minimisation

régulier sans contrainte, nous avons recours à l'expression du quasi-Lagrangien augmenté suggéré par Alart et Curnier dans [6] de la forme :

$$(3.17) \quad \begin{aligned} L_r(\mathbf{v}^h, \gamma_\nu^h, \gamma_\tau^h) &= L(\mathbf{v}^h, \gamma_\nu^h, \gamma_\tau^h) + \frac{r}{2} \|v_\nu^h\|^2 - \frac{1}{2r} [\gamma_\nu^h + r v_\nu^h]_+^2 \\ &\quad + \frac{r}{2} \|\mathbf{v}_\tau^h\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}^2(\gamma_\tau^h + r \mathbf{v}_\tau^h, \hat{C}[\lambda_\nu^h + r u_\nu^h]), \end{aligned}$$

où  $\hat{C}[\lambda_\nu^h + r u_\nu^h] := C([\lambda_\nu^h + r u_\nu^h]_+)$ .

Nous en déduisons le problème de minimisation suivant :

$$(3.18) \quad (\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h, \boldsymbol{\lambda}_\tau^h) \in \arg \min_{\mathbf{v}} \max_{\gamma_\nu} \max_{\gamma_\tau} L_r(\mathbf{v}^h, \gamma_\nu^h, \gamma_\tau^h).$$

Une solution  $(\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h, \boldsymbol{\lambda}_\tau^h)$  du problème (3.18) est caractérisée par :

$$\nabla_{\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h, \boldsymbol{\lambda}_\tau^h} L_r(\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h, \boldsymbol{\lambda}_\tau^h) = \mathbf{0}.$$

Cela nous conduit au système d'équations non linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{u}^h} L_r(\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h, \boldsymbol{\lambda}_\tau^h) = \nabla_{\mathbf{u}^h} J(\mathbf{u}^h) + [\nabla_{\mathbf{u}^h} u_\nu^h]^T [\lambda_\nu^h + r u_\nu^h]_+ \\ \quad + [\nabla_{\mathbf{u}^h} \mathbf{u}_\tau^h]^T \hat{P}(\boldsymbol{\lambda}_\tau^h + r \mathbf{u}_\tau^h) = \mathbf{0}, \\ \nabla_{\lambda_\nu^h} L_r(\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h, \boldsymbol{\lambda}_\tau^h) = -\frac{1}{r} \{\lambda_\nu^h - [\lambda_\nu^h + r u_\nu^h]_+\} = 0, \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}_\tau^h} L_r(\mathbf{u}^h, \lambda_\nu^h, \boldsymbol{\lambda}_\tau^h) = -\frac{1}{r} \{\boldsymbol{\lambda}_\tau^h - \hat{P}(\boldsymbol{\lambda}_\tau^h + r \mathbf{u}_\tau^h)\} = \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

où  $\hat{P}$  est la projection sur le disque  $\hat{C}[\lambda_\nu^h + r u_\nu^h]$ . En adoptant une forme vectorielle, et en omettant le paramètre de discrétisation spatiale  $h$  pour simplifier les notations, nous obtenons le système suivant :

**Problème  $\mathcal{P}_{LC}$ .** *Trouver un champ de déplacement  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d \times N_{Tot}^h}$  et un multiplicateur associé à la contrainte  $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_\nu \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\lambda}_\tau \in \mathbb{R}^{d \times N_{F_3}^h}$  tels que*

$$(3.19) \quad G(\mathbf{u}) + \mathcal{F}(\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = \mathbf{0}_{d \times N_{Tot}^h + (d+1) \times N_{F_3}^h},$$

où  $G(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{d \times N_{Tot}^h} \times \mathbb{R}^{(d+1) \times N_{F_3}^h}$  est la partie hyperélastique et  $\mathcal{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{d \times N_{Tot}^h} \times \mathbb{R}^{(d+1) \times N_{F_3}^h}$  est la contribution non différentiable du contact avec frottement de Coulomb définie par

$$G(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} A(\mathbf{u}) - \mathbf{f} \\ \mathbf{0}_{(d+1) \times N_{F_3}^h} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \lambda_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = \begin{pmatrix} [\nabla \mathbf{u} u_\nu]^T [\lambda_\nu + r u_\nu]_+ + [\nabla \mathbf{u} \mathbf{u}_\tau]^T \hat{P}(\boldsymbol{\lambda}_\tau + r \mathbf{u}_\tau) \\ -\frac{1}{r} \left\{ \lambda_\nu - [\lambda_\nu + r u_\nu]_+ \right\} \\ -\frac{1}{r} \left\{ \boldsymbol{\lambda}_\tau - \hat{P}(\boldsymbol{\lambda}_\tau + r \mathbf{u}_\tau) \right\} \end{pmatrix}.$$

**Remarque 3.2.** La méthode de pénalisation peut être vue comme un cas particulier de la méthode du Lagrangien ; il suffit de considérer les multiplicateurs de Lagrange nuls, i.e.  $\gamma_\nu = 0$  et  $\gamma_\tau = 0$ . En procédant ainsi,  $r$  est assimilé à la rigidité de la fondation.

## 3.2 Méthodes de type "Active set"

Encore à ce jour la condition de Signorini, décrite en (1.19), reste l'une des conditions de contact les plus utilisées dans la littérature. Au cours de la dernière décennie, les stratégies d'"Active set" ont gagné en popularité. L'objectif de telles stratégies est de trouver l'ensemble des noeuds en contact avec l'obstacle parfaitement rigide ; ces noeuds sont dits actifs et les autres sont appelés inactifs, voir [69, 71] pour plus de détails. En outre, un des aspects les plus intéressants de ce type de méthode est qu'elle ne requiert pas l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange et, de ce fait, pourrait faciliter l'implémentation de l'algorithme et améliorer le conditionnement du système. En effet, dans la mesure où les conditions aux limites sont directement imposées sur les noeuds actifs, il s'agit de résoudre une série de problèmes avec des conditions aux limites simples, telle que la condition de Dirichlet, Neumann ou Robin, en fonction de la méthode active set utilisée. La méthode "Primal-dual active set" peut être vue comme une méthode de Newton semi-régulière basée sur la reformulation des conditions (1.19), comme expliqué dans [69]. En effet, il est clairement établi dans [41, 68, 69] que les conditions de contact unilatéral (1.19) peuvent être exprimées sous la forme d'un problème de point fixe et nous le rappelons dans le résultat suivant

**Proposition 3.3.** *Soit  $\gamma > 0$ , les conditions de contact unilatéral (1.19) sont équivalentes à :*

$$(3.20) \quad \Pi_\nu = -[-\Pi_\nu + \gamma u_\nu]_+ \quad \text{sur } \Gamma_3.$$



**Démonstration.** Il s'agit de démontrer successivement les deux implications. Les conditions de contact unilatéral n'autorisent que deux configurations pour le déplacement normal : soit  $u_\nu < 0$ , soit  $u_\nu = 0$ . Si  $u_\nu < 0$ , (1.19)(3) implique que  $\Pi_\nu = 0$ . Par suite

$$-[-\Pi_\nu + \gamma u_\nu]_+ = -[\gamma u_\nu]_+ = 0 \text{ et } \Pi_\nu = 0 \implies \Pi_\nu = -[-\Pi_\nu + \gamma u_\nu]_+.$$

Supposons maintenant que  $u_\nu = 0$  et  $\Pi_\nu \leq 0$

$$-[-\Pi_\nu + \gamma u_\nu]_+ = -[-\Pi_\nu]_+ = \Pi_\nu,$$

soit exactement l'équation (3.20). Réciproquement, (3.20) implique (1.19)(2). Par ailleurs, le cas  $\Pi_\nu = 0$  nous conduit à

$$-[\gamma u_\nu]_+ = 0,$$

ce qui signifie que  $u_\nu < 0$ , dans la mesure où  $\gamma > 0$ . Enfin si  $\Pi_\nu \leq 0$ , d'après (3.20) il vient que  $-\Pi_\nu + \gamma u_\nu > 0$  et

$$\Pi_\nu = -[-\Pi_\nu + \gamma u_\nu]_+ = \Pi_\nu - \gamma u_\nu,$$

donc  $\gamma u_\nu = 0$  et, puisque  $\gamma > 0$  nous avons que  $u_\nu = 0$ . Par conséquent (1.19)(1) et (1.19)(3) sont vérifiées, ce qui achève la démonstration.  $\square$

A présent considérons  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ , une solution du problème variationnel discret  $\mathcal{P}_{V_{Sig}}^h$ , avec  $\lambda_\nu$  le multiplicateur de Lagrange introduit précédemment et défini par  $\lambda_\nu = -\Pi_\nu$  sur  $\Gamma_3^h$ . Désignons par  $p$ , l'indice des noeuds de  $\Gamma_3$ , le Problème  $\mathcal{P}_{V_{Sig}}^h$  peut alors être réécrit sous une forme algébrique discrète avec la condition (3.20) pour le multiplicateur de Lagrange. Cela nous conduit à considérer un système d'équations non linéaires sous la forme suivante

$$(3.21) \quad \mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = A(\mathbf{u}) + \lambda_\nu \nu - \mathbf{f} \\ \mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_{\nu,p} - [\lambda_{\nu,p} + \gamma u_{\nu,p}]_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix},$$

où,  $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  est l'opérateur non linéaire généralisé appartenant à  $\mathbb{R}^{d \times N_{Tot}^h} \times \mathbb{R}^{N_{\Gamma_3}^h}$ . Par conséquent, en adoptant le formalisme de Newton semi-régulier, la solution  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  peut être formulée comme suit :

(i) Choix de  $(\mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)})$ , posons  $k = 0$ .

(ii) Détermination de  $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)})$  tel que

$$\begin{aligned}
 (3.22) \quad & \mathcal{G}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) \delta \mathbf{u}^{(k)} = -\mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}), \\
 & \Delta \mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) = -\mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}), \\
 & \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}, \\
 & \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \delta \boldsymbol{\lambda}^{(k)},
 \end{aligned}$$

où  $\mathcal{G}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$  désigne la différentielle de  $\mathcal{R}^{\mathbf{u}}$  par rapport à la variable  $\mathbf{u}^{(k)}$  i.e.

$$\mathcal{G}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) = \frac{\partial \mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})}{\partial \mathbf{u}^{(k)}},$$

et  $\Delta \mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$  représente la différentielle totale de la fonction de complémentarité  $\mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}}$  par rapport aux variables  $\mathbf{u}^{(k)}$  et  $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$  i.e.

$$\Delta \mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) = \frac{\partial \mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})}{\partial (\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})} (\delta \mathbf{u}^{(k)}, \delta \boldsymbol{\lambda}^{(k)}).$$

(iii) Si  $\|(\mathbf{u}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)}) - (\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\| \leq \epsilon$  et  $\|\mathcal{R}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\| \leq \epsilon$  alors stop, sinon retour en (ii).

Le principe de la méthode est de considérer séparément la solution de  $\mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$  et le point fixe  $\lambda_{\nu,p} = [\lambda_{\nu,p} + \gamma u_{\nu,p}]_+$ , déterminé par l'équation (3.22). Comme nous allons le voir, l'équation (3.22) conduit directement à imposer  $u_{\nu} = 0$  si les noeuds sur  $\Gamma_3^h$  sont en statut de contact en vérifiant la condition d'Active set, à savoir  $\lambda_{\nu,p} + \gamma u_{\nu,p} \geq 0$  pour tout  $p \in \Gamma_3^h$ . En outre, l'équation (3.22) conduit également à la condition  $\lambda_{\nu,p} = 0$  dans le cas de non contact. En complément de la démonstration qui va suivre, le lecteur pourra se référer à [68, 69] pour plus de détails.

**Démonstration.** Il s'agit de déterminer la différentielle généralisée de  $\mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}}$  en  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  ;

- Si le noeud est actif (statut de contact) :  $\lambda_{\nu,p} + \gamma u_{\nu,p} > 0$

$$(3.23) \quad d_{\lambda_{\nu,p}} \mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}} = 0$$

$$(3.24) \quad d_{u_{\nu,p}} \mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}} = -\gamma du_{\nu,p}.$$

- Si le noeud est inactif ( non contact) :  $\lambda_{\nu,p} + \gamma u_{\nu,p} \leq 0$

$$(3.25) \quad d_{\lambda_{\nu,p}} \mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}} = d\lambda_{\nu,p}$$

$$(3.26) \quad d_{u_{\nu,p}} \mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}} = 0.$$

Ci-dessus,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{I}$  désignent respectivement l'ensemble des indices des noeuds actifs et inactifs.

$$(3.27) \quad \Delta \mathcal{R}^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = -\gamma \mathcal{X}_{\mathcal{A}} \delta u_{\nu,p} + \mathcal{X}_{\mathcal{I}} \delta \lambda_{\nu,p},$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\mathcal{A}} &= 1, \mathcal{X}_{\mathcal{I}} = 0 \text{ si } \lambda_{\nu,p} + \gamma u_{\nu,p} > 0, \\ \mathcal{X}_{\mathcal{A}} &= 0, \mathcal{X}_{\mathcal{I}} = 1 \text{ si } \lambda_{\nu,p} + \gamma u_{\nu,p} \leq 0. \end{aligned}$$

Par l'intermédiaire du formalisme de Newton semi-régulier utilisé dans la deuxième équation de (3.22), il est possible de déterminer  $(u_{\nu,p}^{(k+1)}, \lambda_{\nu,p}^{(k+1)})$  à partir de  $(u_{\nu,p}^{(k)}, \lambda_{\nu,p}^{(k)})$ . pour ce faire, il ne reste plus qu'à considérer ladite équation dans les deux cas possibles pour conclure la démonstration.

– Cas "Active set" :  $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = 1$  et  $\mathcal{X}_{\mathcal{I}} = 0$

$$(3.28) \quad u_{\nu,p}^{(k+1)} = 0.$$

– Cas "Inactive set" :  $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = 0$  et  $\mathcal{X}_{\mathcal{I}} = 1$

$$(3.29) \quad \lambda_{\nu,p}^{(k+1)} = 0.$$

□

A présent, nous nous intéressons à la description de l'algorithme itératif associé à la méthode.

(i) Choix de  $(\mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)})$ , posons  $k = 0$ .

(ii) Définition de l'ensemble actif  $\mathcal{A}_{k+1} = \{p \in \Gamma_3^h : \lambda_{\nu,p}^{(k)} + \gamma u_{\nu,p}^{(k)} \geq 0\}$ ,

Définition de l'ensemble inactif  $\mathcal{I}_{k+1} = \Gamma_3^h \setminus \mathcal{A}_{k+1}$ .

(iii) Détermination de  $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)})$  tel que

$$(3.30) \quad \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} - [\mathcal{G}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})]^{-1} \mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$$

$$(3.31) \quad u_{\nu,p}^{(k+1)} = 0 \quad \text{pour tout} \quad p \in \mathcal{A}_{k+1},$$

$$(3.32) \quad \lambda_{\nu,p}^{(k+1)} = 0 \quad \text{pour tout} \quad p \in \mathcal{I}_{k+1}.$$

(iv) Si  $\|(\mathbf{u}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)}) - (\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\| \leq \epsilon$ ,  $\|\mathcal{R}(\mathbf{u}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)})\| \leq \epsilon$  et  $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k$  puis stop, sinon retour en (ii).

Nous insistons sur le fait que l'objectif des méthodes de type active set est de déterminer l'ensemble  $\mathcal{A}$  des noeuds actuellement en contact avec l'obstacle parfaitement rigide. Autre caractéristique notable de ces méthodes, à la différence d'une approche basée sur le Lagrangien augmenté, il n'est ici pas nécessaire de considérer des noeuds additionnels pour la détermination de la contrainte normale de contact. Toutefois, les deux méthodes ne sont pas sans présenter quelques similitudes. Notons à ce titre que la deuxième équation de (3.21) correspond exactement à la seconde équation de (3.10). Nous verrons les attraits des méthodes de type active set plus en détails dans le Chapitre 7.

### 3.3 Méthodes de type conservation de l'énergie

Au cours des dernières années, les méthodes d'intégrations temporelles avec des propriétés de conservation de l'énergie et visant à résoudre des problèmes élastodynamiques non linéaires ont été source d'intérêt pour nombre de chercheurs. En outre, un certain nombre de travaux ont été consacrés à l'extension de telles propriétés à des problèmes d'impact sans frottement ; en particulier Laursen et Chawla [89] et Armero et Petocz [11] ont mis en évidence l'intérêt de la condition de persistance pour conserver l'énergie dans le cas discret. Néanmoins, une interpénétration au contact existe, interpénétration qui disparaît lorsque le pas de temps tend vers zéro. Nous commençons par présenter le problème hyperélastodynamique considéré pour la conservation de l'énergie, nous poursuivons avec la discrétisation spécifique de ce problème puis terminons avec un rappel de trois méthodes éprouvées visant à conserver l'énergie en présence de contact avec frottement.

#### 3.3.1 Un problème de contact hyperélastique avec frottement

On adjoint au problème hyperélastique  $\mathcal{M}$ , présenté en section 1.5, du contact et du frottement. Pour ce faire, nous introduisons la fonction  $\varphi_\tau : X_\tau \rightarrow (-\infty, +\infty]$  définie par

$$(3.33) \quad \varphi_\tau(\mathbf{v}_\tau(t)) = \int_{\Gamma_3} \|\mathbf{v}_\tau(t)\| da \quad \forall \mathbf{v}_\tau \in L_2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d).$$

Il s'agit alors de considérer le problème de contact hyperélastodynamique suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{\Pi} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da + \mathcal{P}_{cf}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \\ \mathcal{P}_{cf}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \gamma_{\nu}(t), v_{\nu} \rangle_{Y_{\nu}, X_{\nu}} + \langle \gamma_{\tau}(t), \mathbf{v}_{\tau} \rangle_{Y_{\tau}, X_{\tau}} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\ \gamma_{\nu}(t) \in \partial \varphi_{\nu}(u_{\nu}(t)), \\ \gamma_{\tau}(t) \in \mu \gamma_{\nu}(t) \partial \varphi_{\tau}(\dot{\mathbf{u}}_{\tau}(t)). \end{array} \right.$$

Ici, la contrainte tangentielle  $\gamma_{\tau}$  vérifie l'inclusion sous-différentielle définie en (1.38). On attend de la solution d'un tel problème qu'elle satisfasse un certain nombre de propriétés de conservation, et en particulier la conservation de l'énergie. Dans le cas qui nous occupe, elle peut se traduire de la manière suivante :

$$(3.34) \quad \begin{aligned} \int_0^t \dot{E}(s) ds &= E(t) - E(0) \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dx ds + \int_0^t \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \dot{\mathbf{u}} \, da ds - \int_0^t \mathcal{W}_{cf} \, ds, \end{aligned}$$

où  $E(t)$  désigne l'énergie interne du système à l'instant  $t$ , définie par

$$(3.35) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 \, dx + \int_{\Omega} W(F) \, dx.$$

Le travail des forces de contact avec frottement, désigné par  $\mathcal{W}_{cf}(t)$  dans (3.34), est défini par

$$(3.36) \quad \mathcal{W}_{cf} = \mathcal{P}_{cf}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \int_{\Gamma_3} (\gamma_{\nu} \dot{u}_{\nu} + \gamma_{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{\tau}) \, da.$$

De là, en considérant le cas de la condition de persistance (1.30), le bilan énergétique peut être conservatif ou dissipatif. En l'absence de forces extérieures, nous avons :

#### Cas sans frottement

$$(3.37) \quad \gamma_{\nu} \dot{u}_{\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{W}_{cf} = 0 \Rightarrow E(0) = E(t).$$

#### Cas avec frottement

$$(3.38) \quad \gamma_{\nu} \dot{u}_{\nu} = 0, \quad \gamma_{\tau} \dot{\mathbf{u}}_{\tau} \geq 0 \Rightarrow \mathcal{W}_{cf} \geq 0 \Rightarrow E(0) \geq E(t).$$

Le premier cas indique que l'énergie totale du système est parfaitement conservée. Le second traduit la dissipation d'énergie correspondant au phénomène dissipatif qu'est le frottement.

### 3.3.2 Formulation incrémentale

Dans le reste de la section, afin d'alléger les notations et de faciliter la lecture, nous n'indiquerons pas que certaines variables dépendent des paramètres de discrétisation  $k$  et  $h$ , i.e., nous écrirons  $\mathbf{u}$  à la place de  $\mathbf{u}^{hk}$ , par exemple.

Afin de résoudre un problème elastodynamique non linéaire, nous devons utiliser des schémas d'intégration temporelle adaptés pour la préservation des propriétés de conservation de l'énergie. Quand des problèmes dynamiques non linéaires sont considérés, les schémas implicites standards ( $\theta$ -méthode, Schémas de Newmark, points milieux ou méthodes de type Hilber-Hughes-Taylor) perdent leur stabilité inconditionnelle, comme expliqué dans [65, 88]. Par conséquent, il est nécessaire d'utiliser des schémas implicites conservant l'énergie comme ceux utilisés dans [12, 55, 60, 88, 133], qui sont appropriés du fait de leur précision et stabilité lors d'une intégration sur des grands pas de temps. Dans toutes ces méthodes, les propriétés discrètes de conservation mécanique sont recherchées. Afin d'établir de telles propriétés de conservation, l'un des schémas implicites d'intégration temporelle les plus utilisés est le schéma des points milieux d'ordre 2 donné par

$$(3.39) \quad \delta \mathbf{u}_n = -\delta \mathbf{u}_{n-1} + \frac{2}{k}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}).$$

En outre, en ayant recours au schéma d'intégration temporelle de Gonzalez [55], l'inégalité variationnelle est caractérisée par l'opérateur  $B$  défini par

$$(3.40) \quad \langle A\mathbf{u}_{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{v} \rangle_{V \times V^*} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Pi}^{algo} : \nabla \mathbf{v} \, dx \quad \text{pour } \mathbf{v} \in V^h,$$

Dans laquelle le tenseur discret  $\boldsymbol{\Pi}^{algo}$  est introduit afin de satisfaire exactement les propriétés discrètes de conservation de l'énergie. Ce tenseur défini par Gonzalez dans [55] est de la forme

$$(3.41) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\Pi}^{algo} = \mathbf{F}_{n-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma}^{algo}, \\ \boldsymbol{\Sigma}^{algo} = 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}_{n-\frac{1}{2}}) + 2[\tilde{W}(\mathbf{C}_n) - \tilde{W}(\mathbf{C}_{n-1}) \\ - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}_{n-\frac{1}{2}}) : \Delta \mathbf{C}_{n-1}] \frac{\Delta \mathbf{C}_{n-1}}{\Delta \mathbf{C}_{n-1} : \Delta \mathbf{C}_{n-1}}, \end{cases}$$

avec  $\Delta \mathbf{C}_{n-1} = \mathbf{C}_n - \mathbf{C}_{n-1}$  et  $\mathbf{C}_{n-1} = {}^t \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{F}_{n-1}$ . Comme cela est montré dans [44], le principe de l'indifférence matérielle implique que  $W(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{C})$ . A présent, en utilisant les arguments figurant dans [55], il s'ensuit que (3.41) vérifie exactement la conservation de l'énergie décrite par la condition

$$(3.42) \quad \boldsymbol{\Pi}^{algo} : (\nabla \mathbf{u}_n - \nabla \mathbf{u}_{n-1}) = \tilde{W}(\mathbf{C}_n) - \tilde{W}(\mathbf{C}_{n-1}).$$

Pour plus de détails sur le principe de conservation de l'énergie standard, le lecteur pourra se référer à [12, 55, 60, 88, 133]. En procédant ainsi, la formulation faible semi discrète du problème élastodynamique non linéaire avec des conditions de contact et de frottement imposées à l'instant  $t_{n-\frac{1}{2}}$ , considéré entre les instants  $t_{n-1}$  et  $t_n$  donne le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_n \in V^h \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \rho(\dot{\mathbf{u}}_n - \dot{\mathbf{u}}_{n-1}) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{\Pi}^{algo} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f}_{0_{n-\frac{1}{2}}} \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2_{n-\frac{1}{2}}} \cdot \mathbf{v} \, da \\ + \langle \gamma_{\nu_n}, v_{\nu} \rangle_{Y_{\nu}, X_{\nu}} + \langle \gamma_{\tau_n}, \mathbf{v}_{\tau} \rangle_{Y_{\tau}, X_{\tau}} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^h, \\ \gamma_{\nu_n} \in \partial \varphi_{\nu}(u_{\nu_n}), \\ \gamma_{\tau_n} \in \mu \gamma_{\nu_n} \partial \varphi_{\tau}(\delta \mathbf{u}_{\tau_n}), \end{array} \right.$$

où  $\delta \mathbf{u}_{\tau_n}$  désigne la forme discrète de la vitesse tangentielle exprimée par

$$(3.43) \quad \delta \mathbf{u}_{\tau_n} = \frac{\mathbf{u}_{\tau_n} - \mathbf{u}_{\tau_{n-1}}}{k},$$

avec  $k = \frac{T}{N}$ , le pas de temps, et la notation  $\square_{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\square_n + \square_{n-1})$ , où  $\square_n$  représente l'approximation de  $\square(t_n)$ . Notons que les conditions discrètes de contact avec frottement peuvent être considérées au temps  $t_n$  et non au temps  $t_{n-\frac{1}{2}}$ . Un tel choix adopté par plusieurs auteurs (se référer à [13, 14, 55, 90] pour plus de détails) permet à la solution  $\mathbf{u}_n$  de vérifier les conditions de contact au temps désiré  $t_n$ . Un schéma au temps  $t_{n-\frac{1}{2}}$  ne vérifierait pas la condition de non interpénétration à l'instant final  $t_n$ .

De nombreux auteurs ont cherché à étendre ces propriétés de conservation au cas de l'impact sans frottement. Il a été montré, en particulier, dans [11] et [89] l'intérêt de la condition de persistance afin de conserver l'énergie discrète. Toutefois, il se trouve que l'interpénétration ne disparaît que lorsque le pas de temps tend vers 0. Afin de surmonter un tel obstacle, une méthode efficace consiste à introduire un saut discret en vitesse, voir [90]. Néanmoins, cette méthode requiert la solution d'un système auxiliaire afin de calculer la nouvelle vitesse qui engendre un coût de calcul supplémentaire non négligeable. Il a également été considéré dans [62] une **pénalisation spécifique** de la condition de contact permettant d'obtenir des propriétés discrètes de conservation de l'énergie pour des vitesses "modérées". Ensuite, il a été introduit dans [80, 81] la méthode "**Equivalent Mass Matrix**" (EMM), basée sur une procédure de redistribution de la matrice de masse. Enfin, l'approche développée dans [13], intitulée **stratégie à deux étapes**, va permettre de satisfaire nécessairement sur un même pas de temps les conditions de contact unilatéral et de contact persistant afin

de conserver l'énergie. On se propose de présenter succinctement ces trois méthodes de type conservation de l'énergie.

### 3.3.3 Stratégie à deux étapes

Il est clairement établi qu'il n'est pas possible d'imposer dans le même temps les conditions de Kuhn-Tucker et de persistance, le problème résultant étant alors surcontraint. Un moyen de contourner la difficulté à moindre coût consiste à imposer successivement, en deux étapes, les conditions sus-citées durant le passage de  $t_{n-1}$  à  $t_n$ . Au cours de l'étape préliminaire (a), il s'agit de résoudre le système (3.43) par une méthode de Newton, permettant ainsi de trouver les statuts de contact. Ensuite, une méthode de continuation de Newton est utilisée sur la solution trouvée lors de l'étape (a), au cours de laquelle on substitue la loi de contact unilatérale par la loi de contact persistant (1.31) afin de recouvrir les propriétés de conservation de l'énergie.

Etape (a) : Schéma de Newton pour résoudre le système (3.43)

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \gamma_{\nu_n} \in \partial\varphi_\nu(u_{\nu_n}), \\ \gamma_{\tau_n} \in \mu\gamma_{\nu_n}\partial\varphi_\tau(\delta\mathbf{u}_{\tau_n}). \end{cases}$$

Etape (b) : Continuation du schéma de Newton pour résoudre (3.43)

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \text{si } u_\nu^{(a)} < 0, \gamma_{\nu_n} = 0, \\ \text{si } u_\nu^{(a)} \geq 0, \gamma_{\nu_n} \in \partial\varphi_\nu(\delta u_{\nu_n}), \\ \gamma_{\tau_n} \in \mu\gamma_{\nu_n}\partial\varphi_\tau(\delta\mathbf{u}_{\tau_n}). \end{cases}$$

Notons bien que la condition de contact unilatéral n'est plus rigoureusement respectée au temps  $t_n$ , signifiant par là même que cette stratégie n'est adaptée que pour des impacts à petites vitesses.

Intéressons nous à présent à la conservation de l'énergie discrète. Entre les instants  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , la différence d'énergie discrète s'écrit

$$(3.44) \quad \begin{aligned} E_n - E_{n-1} = & k \int_{\Omega} \mathbf{f}_{0_{n-\frac{1}{2}}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}} dx + k \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2_{n-\frac{1}{2}}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}} da \\ & - k \int_{\Gamma_3} (\gamma_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} + \gamma_{\tau_n} \cdot \delta \mathbf{u}_{\tau_n}) da, \end{aligned}$$

où  $E_{n-1}$  et  $E_n$  désignent respectivement l'énergie interne  $E$  aux instants  $t_{n-1}$  et  $t_n$ .

**Remarque 3.4.** On constate que la différence d'énergie discrète tend effectivement vers 0 lorsque le pas de temps  $k$  tend vers 0.



L'énergie discrète  $E_n$  s'écrit :

$$(3.45) \quad E_n = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_n^2 dx + \int_{\Omega} W(F_n) dx.$$

De là, en l'absence de forces extérieures, le bilan énergétique durant les étapes (a) et (b) se traduit de la manière suivante :

Cas sans frottement

$$(3.46) \quad \begin{aligned} \gamma_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} &\geq 0 \Rightarrow E_n^{(a)} \leq E_{n-1}^{(a)}, \\ \gamma_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} &= 0 \Rightarrow E_n^{(b)} = E_{n-1}^{(b)}. \end{aligned}$$

Cas avec frottement

$$(3.47) \quad \begin{aligned} \gamma_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} &\geq 0, \quad \gamma_{\tau_n} \delta \mathbf{u}_{\tau_n} \geq 0 \Rightarrow E_n^{(a)} \leq E_{n-1}^{(a)}, \\ \gamma_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} &= 0, \quad \gamma_{\tau_n} \delta \mathbf{u}_{\tau_n} \geq 0 \Rightarrow E_n^{(b)} \leq E_{n-1}^{(b)}. \end{aligned}$$

Dans le cas sans frottement, il survient une perte d'énergie à l'issue de l'étape (a) en désaccord avec la physique du problème. L'étape (b) nous permet toutefois de restaurer l'énergie, dans ce même cas. Si l'on tient compte du frottement, la dissipation de l'énergie discrète observée est cohérente avec le phénomène physique considéré.

### 3.3.4 Pénalisation spécifique

Dans la méthode précédente, il était nécessaire d'avoir recours à la condition de persistance afin d'obtenir de bonnes propriétés de conservation de l'énergie ; ici il est possible de s'en affranchir. Les conditions de Kuhn-Tucker sont traités à l'aide d'une méthode de pénalisation, méthode utilisée habituellement pour une loi de compliance normale. Le multiplicateur de Lagrange est alors défini par

$$(3.48) \quad \gamma_{\nu} = r[u_{\nu}]_+ \quad \text{où } r \text{ est assimilé à la rigidité de la fondation.}$$

La stratégie utilisée dans [62] conduit ainsi au travail  $\mathcal{W}_c$  de la force de contact donné par

$$(3.49) \quad \mathcal{W}_c = \int_{\Gamma_3} \gamma_{\nu} \dot{u}_{\nu} da = \frac{r}{2} \int_{\Gamma_3} \frac{d}{dt} [u_{\nu}(t)]_+^2 da.$$

De là, avec l'approche énergétique de Gonzalez, la conservation de l'énergie du système s'écrit

$$(3.50) \quad \begin{aligned} E(t) - E(0) &= \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} dx ds + \int_0^t \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \dot{\mathbf{u}} dad s \\ &\quad + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_3} ([u_{\nu}(t)]_+^2 - [u_{\nu}(0)]_+^2) da. \end{aligned}$$

A présent, considérons la problème sous sa forme discrète ; la force normale de contact  $\gamma_{\nu_n}$  est définie par

$$(3.51) \quad \gamma_{\nu_n} = r p_{spe}(u_{\nu_n}) \quad \text{avec} \quad p_{spe}(u_{\nu_n}) = \frac{[u_{\nu_n}]_+^2 - [u_{\nu_{n-1}}]_+^2}{2(u_{\nu_n} - u_{\nu_{n-1}})}.$$

En présence de frottement, une technique de pénalisation peut être utilisée pour définir la force tangentielle de contact  $\gamma_{\tau_n}$  en fonction du statut :

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \gamma_{\tau_n} = r \delta u_{\tau_n}, & \text{cas d'adhérence} \\ \gamma_{\tau_n} =, -\epsilon \mu \gamma_{\nu_n} \tau_n, & \text{cas de glissement.} \end{cases}$$

Considérons la formulation discrète du bilan énergétique entre les instants  $t_{n-1}$  et  $t_n$

$$(3.52) \quad \begin{aligned} E_n - E_{n-1} = & k \int_{\Omega} \mathbf{f}_{0_{n-\frac{1}{2}}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}} dx + k \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2_{n-\frac{1}{2}}} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}} da \\ & - k \int_{\Gamma_3} \left( r \frac{[u_{\nu_n}]_+^2 - [u_{\nu_{n-1}}]_+^2}{2(u_{\nu_n} - u_{\nu_{n-1}})} \delta u_{\nu_n} + \gamma_{\tau_n} \cdot \delta \mathbf{u}_{\tau_n} \right) da. \end{aligned}$$

En l'absence de forces extérieures et de frottement, et conformément au cas continu (3.50), on retrouve

$$(3.53) \quad E_n - E_{n-1} = -\frac{r}{2} \int_{\Gamma_3} ([u_{\nu_n}]_+^2 - [u_{\nu_{n-1}}]_+^2) da.$$

Notons toutefois que la condition de non interpénétration n'est pas non plus exactement respectée au temps  $t_n$  dans la mesure où la condition (3.51) représente une pénalisation spécifique qui diffère de (3.48). Si l'on considère un cas avec frottement, la positivité de  $\gamma_{\tau_n} \cdot \delta \mathbf{u}_{\tau_n}$  est cohérente avec la dissipation d'énergie que l'on est en droit d'attendre.

### 3.3.5 "Equivalent Mass Matrix"

Avec une distribution de masse standard, le problème semi-discret en espace conduit à des instabilités qui auraient pour source la perte d'énergie cinétique induite lors de l'impact entre le corps et la fondation sur les noeuds en contact. Afin de surmonter cet obstacle, la stratégie développée dans [80] consiste à considérer une distribution de masse dans laquelle les points situés sur la frontière de contact  $\Gamma_3$  n'aient plus d'inertie. Soient  $M$ , la matrice de masse standard, et  $M_e$ , la nouvelle matrice de masse ; une telle propriété se traduit en terme de contraintes de la manière suivante

$$(3.54) \quad \boldsymbol{\nu}_i^T M_e \boldsymbol{\nu}_j = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{S},$$

avec  $\mathcal{S}$ , l'ensemble des indices des noeuds appartenant à la frontière  $\Gamma_3^h$  et  $\boldsymbol{\nu}_i$ , la normale unitaire sortant au noeud d'indice  $i$ . La matrice de masse équivalente est construite de telle manière que la masse totale, le centre de gravité et les moments d'inertie soient conservés. Il s'agit alors de résoudre le problème suivant

$$(3.55) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } \boldsymbol{\lambda} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ tels que} \\ M_e \ddot{\mathbf{u}} + K \mathbf{u} = \mathbf{L} + \sum_{i \in S} \lambda_{\nu}^i \boldsymbol{\nu}_i, \\ \boldsymbol{\nu}_i^T \mathbf{u} \leq 0, \quad \lambda_{\nu}^i \leq 0, \quad (\boldsymbol{\nu}_i^T \mathbf{u}) \lambda_{\nu}^i = 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}^1, \end{cases}$$

avec  $K$ , la matrice issue de la linéarisation de l'opérateur non linéaire  $A$  utilisé au début de ce Chapitre,  $\mathbf{L}$ , la contribution des forces extérieures et  $\lambda_{\nu}^i$ , les multiplicateurs de Lagrange associés aux noeuds sur la frontière de contact  $\Gamma_3^h$ . L'énergie discrète du système (3.55) est alors donnée par

$$(3.56) \quad E(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T M_e \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T K \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{L}.$$

De ce même système, il vient que :

$$(3.57) \quad \dot{\mathbf{u}}^T M_e \ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}^T K \mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{L} + \sum_{i \in S} \lambda_{\nu}^i \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\nu}_i.$$

En intégrant ensuite de 0 à  $t$  et en combinant le résultat obtenu avec (3.56), on a

$$(3.58) \quad E(t) = \sum_{i \in S} \int_0^t \lambda_{\nu}^i \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\nu}_i dt + E(0), \quad \forall t \in [0, T].$$

Comme la solution du système satisfait naturellement la condition de persistance (1.30) en chaque noeud de  $\Gamma_3^h$ , i.e.  $\lambda_{\nu}^i \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\nu}_i = 0 \ \forall i \in S$ , nous avons

$$(3.59) \quad E(t) = E(0).$$

Un tel résultat est conforme avec ce que nous sommes en droit d'attendre dans le cas continu. Quelques interprétations et extensions de cette méthode figurent dans [61]. Le problème résultant permet d'obtenir une solution Lipschitz-régulière en temps ainsi que de bonnes propriétés d'évolution de l'énergie, qui s'expliquent par le fait que la condition de persistance est automatiquement satisfaite. Une telle approche a été utilisée dans de nombreux travaux, et, de ce fait, les aspects théoriques et numériques en

relation avec le modèle étudié dans le Chapitre 8 peuvent être retrouvés dans [60, 63].

Notons que les différentes méthodes numériques employées dans les parties suivantes ont été implémentées dans un code en Fortran au sein de MODULEF, une bibliothèque d'éléments finis développée par l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Rocquencourt, France). Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au site web <https://www.rocq.inria.fr/modulef/francais.html>.



## Deuxième partie

### Analyse mathématique de quelques problèmes de contact



## Partie II

### Analyse mathématique de quelques problèmes de contact

Nous allons à présent réaliser l'étude et l'analyse mathématiques de trois problèmes de contact en petites déformations : un problème élastique statique avec compliance normale et contrainte unilatérale, un problème viscoélastique quasi-statique avec un terme mémoire, réponse normale instantanée et contrainte unilatérale en vitesse et un problème viscoélastique dynamique en compliance normale. Cette partie est divisée en trois Chapitres composés de six, cinq et quatre sections, respectivement. Une fois la formulation variationnelle de chaque problème établie, nous abordons la question de l'existence et de l'unicité d'une solution faible au problème. Nous verrons d'ailleurs une seconde formulation variationnelle d'un même problème, dans le Chapitre 4, à travers la notion de dualité. Nous étudions ensuite quelques résultats de convergence liés à la perturbation des données initiales du problème. Après ce travail portant sur l'existence et l'unicité des problèmes, nous nous intéressons à l'approximation variationnelle des formulations, puis nous proposons des estimations de l'erreur de discrétisation avant d'illustrer nos résultats par quelques simulations numériques. Il s'agit non seulement de mettre en évidence les caractéristiques mécaniques de nos modèles et de les confronter au bon sens physique mais également de valider les résultats obtenus au cours de l'étude théorique, à savoir les résultats de convergence et d'estimation de l'erreur.





## Chapitre 4

# Problème statique de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale

Dans ce Chapitre, on se propose d'étudier un problème de contact en statique modélisant l'interaction entre un corps de type élastique, comportement déjà présenté dans la sous-section 1.2.1, et une fondation. Le contact suit une loi de compliance normale couplée aux conditions de Signorini, comme décrit en (1.26), le frottement étant, quant à lui, supposé non monotone. Ce Chapitre comporte 6 sections. Dans la première est proposée une formulation forte du problème ainsi que les hypothèses inhérentes. Ensuite, dans la section 2, nous donnons une formulation faible et abordons la question de l'existence et de l'unicité d'une solution faible au problème. Puis, la section 3 met en avant une formulation duale de ce problème. Dans la section 4, nous démontrons un résultat de convergence portant sur l'étude du problème d'origine dans lequel est introduite une perturbation des données. La section 5 est consacrée à l'approximation variationnelle et à l'obtention de résultats d'estimation théorique de l'erreur de discrétisation. Enfin, nous terminons sur une présentation de quelques simulations numériques permettant d'illustrer le type de modélisation choisie ainsi que la validation numérique du résultat de convergence et de l'estimation de l'erreur. Les sections 2, 5 et 6 ont fait l'objet des articles [23] et [25], la section 3 a fait l'objet de l'article [134].

## 4.1 Modèle

Le cadre physique correspond à celui introduit dans la section 1.1 ; pour rappel, un corps élastique occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) doté d'une frontière  $\Gamma$  partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  (avec  $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ ). Le déplacement du corps est bloqué sur  $\Gamma_1$ , une densité de forces volumiques  $\mathbf{f}_0$  agit sur  $\Omega$  et une force de traction surfacique de densité  $\mathbf{f}_2$  agit sur  $\Gamma_2$ . Enfin,  $\Gamma_3$  correspond à la zone de contact entre le corps et la fondation.

La formulation forte du problème peut alors être résumée ainsi :

**Problème  $\mathcal{P}$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$  tels que*

$$(4.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(4.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(4.3) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$

$$(4.4) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2,$$

$$(4.5) \quad \left. \begin{array}{l} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3,$$

$$(4.6) \quad \left. \begin{array}{l} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p(u_\nu), \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p(u_\nu) \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{si} \quad \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3.$$

Ici, (4.1) représente la loi constitutive élastique du matériau dans laquelle  $\mathcal{F}$  est une fonction constitutive, déjà définie dans (1.8). Puis, (4.2) est l'équation d'équilibre dans le cas d'un problème statique (cf (1.5)). Ensuite, (4.3) et (4.4) représentent les conditions aux limites de déplacement-traction, respectivement. Enfin, les conditions (4.5) et (4.6) concernent les conditions de contact avec frottement. Nous considérons ici le cas d'une loi de compliance normale couplée à une loi de contact unilatéral, comme présenté dans (1.26). A cette loi sont également associés un frottement de type Coulomb pour la partie compliance normale (1.35) et une loi de Tresca pour le contact unilatéral (1.33). Pour ce faire, nous introduisons la condition de compatibilité suivante :

$$F_{tres} = \mu p(g)$$

qui permet d'assurer la continuité de seuil de frottement lorsque la pénétration maximale atteint la valeur  $g$ . Afin d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution du problème variationnel introduit ci-après, nous supposons que l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F}$  satisfait les hypothèses suivantes :

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) Pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

Nous supposons également que les grandeurs  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_2$  sont dotées de la régularité suivante

$$(4.8) \quad \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d.$$

Le seuil de pénétration  $g$  est tel que

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } g : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } G > 0 \text{ tel que } g(\mathbf{x}) \leq G \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}) \text{ est continue sur } \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Enfin, la fonction de compliance normale et le coefficient de frottement satisfont respectivement

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) Il existe } p_0 > 0 \text{ tel que } p(\mathbf{x}, G) \leq p_0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(e) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(f) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \quad \text{pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) L'application } r \mapsto \mu(\mathbf{x}, r) \text{ est continue p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } r \mapsto \mu(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) Il existe } \mu_0 > 0 \text{ tel que } \mu(\mathbf{x}, r) \leq \mu_0 \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(e) Il existe } m_{\mu} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mu(\mathbf{x}, r_1) - \mu(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq -m_{\mu} |r_1 - r_2|^2 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Maintenant, nous nous intéressons à la formulation variationnelle du Problème  $\mathcal{P}$ . Pour cela, nous introduisons un ensemble de déplacements admissibles  $U$ , l'opérateur  $A$ , la fonction  $j : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbf{f} \in V$  définis par

$$(4.12) \quad U = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \},$$

$$(4.13) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)v_\nu \, da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(4.14) \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p(u_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| \, da \quad \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V,$$

$$(4.15) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Considérons que  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (4.1)–(4.6) avec  $\mathbf{v} \in U$ . Nous utilisons la formule de Green (2.9) et la définition (4.15) afin d'obtenir :

$$(4.16) \quad \begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q &= (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \, da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) \, da. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les conditions (4.5), (4.6) et la définition (4.12), nous obtenons :

$$(4.17) \quad \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \, da \geq - \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)(v_\nu - u_\nu) \, da,$$

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) \, da &\geq \int_{\Gamma_3} \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p(u_\nu) \|\mathbf{u}_\tau\| \, da \\ &- \int_{\Gamma_3} \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p(u_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| \, da. \end{aligned}$$

Finalement, en combinant l'égalité (4.16) avec les inégalités (4.17) et (4.18), puis en utilisant la loi constitutive (4.1) et les définitions (4.12)–(4.15), nous trouvons la formulation variationnelle suivante du Problème  $\mathcal{P}$ .

**Problème  $\mathcal{P}_V$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u}$  tel que*

$$(4.19) \quad \mathbf{u} \in U, \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Notons que le Problème  $\mathcal{P}_V$  est formulé en terme de champ de déplacements. Une fois que ce dernier est connu, on peut aisément déduire le champ de contraintes à l'aide de la loi constitutive (4.1). Le couple  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  qui satisfait (4.1) et (4.19) est appelé *solution faible* du problème de contact avec frottement  $\mathcal{P}$ .

## 4.2 Existence et unicité

Le but de cette section est d'étudier l'existence et l'unicité du problème variationnel  $\mathcal{P}_V$ . Pour cela, nous allons considérer et montrer le théorème suivant :

**Théorème 4.1.** *Supposons que les conditions (4.7)–(4.11) soient vérifiées. Alors, les propositions suivantes le sont également :*

- 1) *Le Problème  $\mathcal{P}_V$  a au moins une solution.*
- 2) *Il existe une constante  $\alpha_0$ , ne dépendant que de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  et  $\mathcal{F}$ , telle que la solution du problème  $\mathcal{P}_V$  soit unique, si*

$$(4.20) \quad p_0 m_\mu + \mu_0 L_p < \alpha_0.$$

Nous détaillons ici les résultats obtenus dans [23].

**Démonstration.** 1) Nous utilisons le résultat abstrait d'existence issu du Theorème 2.16 avec  $X = V$  et  $K = U$ . Notons tout d'abord que  $U$  est une partie convexe fermée non-vide de  $V$  et que  $0_V \in U$ . Ensuite, nous utilisons la définition (4.13) ainsi que les propriétés (4.7)(c) et (4.10)(e) pour voir que

$$(4.21) \quad (A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

D'autre part, en utilisant cette fois (4.7)(b), (4.10)(b), (4.13) ainsi que l'inégalité de la trace (2.4), nous avons

$$(4.22) \quad \|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_V \leq (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

De (4.21) et (4.22), on déduit que  $A$  est un opérateur continu de Lipschitz fortement monotone sur l'espace  $V$ . En outre, il est aisé de voir que la fonctionnelle  $j$ , définie par (4.14), satisfait la condition (2.15).

Considérons maintenant 2 suites  $\{\boldsymbol{\eta}_n\} \subset V$ ,  $\{\mathbf{u}_n\} \subset V$  telles que

$$(4.23) \quad \boldsymbol{\eta}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\eta} \quad \text{dans } V, \quad \mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{dans } V$$

et soit  $\mathbf{v}$  un élément arbitraire dans  $V$ . Alors, d'après la définition (4.14) et après quelques calculs élémentaires, nous trouvons que

$$\begin{aligned} & j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}) \\ & \leq \int_{\Gamma_3} \left( p(\boldsymbol{\eta}_n) |\mu(\|\boldsymbol{\eta}_{n\tau}\|) - \mu(\|\boldsymbol{\eta}_\tau\|)| + \mu(\|\boldsymbol{\eta}_\tau\|) |p(\eta_{n\nu}) - p(\eta_\nu)| \right) \|\mathbf{v}_\tau\| da \end{aligned}$$

et, en utilisant les bornes (4.10)(d) et (4.11)(d) nous en déduisons que

$$\begin{aligned} (4.24) \quad & j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}) \\ & \leq \int_{\Gamma_3} \left( p_0 |\mu(\|\boldsymbol{\eta}_{n\tau}\|) - \mu(\|\boldsymbol{\eta}_\tau\|)| + \mu_0 |p(\eta_{n\nu}) - p(\eta_\nu)| \right) \|\mathbf{v}_\tau\| da. \end{aligned}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Un raisonnement similaire conduit aux inégalités

$$\begin{aligned} (4.25) \quad & j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n) \\ & \leq \int_{\Gamma_3} \left( p_0 |\mu(\|\boldsymbol{\eta}_{n\tau}\|) - \mu(\|\boldsymbol{\eta}_\tau\|)| + \mu_0 |p(\eta_{n\nu}) - p(\eta_\nu)| \right) \|\mathbf{u}_{n\tau}\| da, \end{aligned}$$

$$(4.26) \quad j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}) \leq \int_{\Gamma_3} p_0 \mu_0 \left| \|\mathbf{u}_{n\tau}\| - \|\mathbf{u}_\tau\| \right| da$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

En utilisant la convergence faible (4.23), la compacité de la trace et les propriétés des fonctions  $p$  et  $\mu$ , nous constatons que

$$\mu(\|\boldsymbol{\eta}_{n\tau}\|) \rightarrow \mu(\|\boldsymbol{\eta}_\tau\|), \quad p(\eta_{n\nu}) \rightarrow p(\eta_\nu), \quad \|\mathbf{u}_{n\tau}\| \rightarrow \|\mathbf{u}_\tau\| \quad \text{dans } L^2(\Gamma_3)$$

et, de ce fait, (4.24)–(4.26) permettent de déduire que

$$(4.27) \quad j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) \rightarrow j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}),$$

$$(4.28) \quad j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n) \rightarrow 0,$$

$$(4.29) \quad j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n) \rightarrow j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}),$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . Nous écrivons maintenant

$$j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) - j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n) = j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n) + j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n) - j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puis nous utilisons les résultats de convergence (4.27)–(4.29) pour voir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) - j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n)] = j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}),$$

ce qui montre que la fonctionnelle  $j$  satisfait les conditions (2.16). La première partie du Théorème 4.1 concernant l'existence d'une solution est maintenant une conséquence directe du Théorème 2.16.

2) Afin de démontrer l'unicité de la solution, considérons  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ , deux solutions du Problème  $\mathcal{P}$ . Ensuite, en utilisant (4.19), (4.21) et après un calcul élémentaire nous trouvons que

$$(4.30) \quad m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \leq j(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2).$$

De plus, en utilisant la définition (4.14) de la fonction  $j$ , il s'avère que

$$\begin{aligned} & j(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \\ &= \int_{\Gamma_3} (\mu(\|\mathbf{u}_{1\tau}\|)p_\nu(u_{1\nu}) - \mu(\|\mathbf{u}_{2\tau}\|)p_\nu(u_{2\nu})) (\|\mathbf{u}_{2\tau}\| - \|\mathbf{u}_{1\tau}\|) da \\ &= \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{1\nu}) (\mu(\|\mathbf{u}_{1\tau}\|) - \mu(\|\mathbf{u}_{2\tau}\|)) (\|\mathbf{u}_{2\tau}\| - \|\mathbf{u}_{1\tau}\|) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \mu(\|\mathbf{u}_{2\tau}\|) (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})) (\|\mathbf{u}_{2\tau}\| - \|\mathbf{u}_{1\tau}\|) da. \end{aligned}$$

Ainsi, en se servant des propriétés (4.10) et (4.11) des fonctions  $\mu$  et  $p$ , nous obtenons que

$$\begin{aligned} & j(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \\ &\leq \int_{\Gamma_3} p_0 m_\mu (\|\mathbf{u}_{1\tau}\| - \|\mathbf{u}_{2\tau}\|)^2 da + \int_{\Gamma_3} \mu_0 L_p |u_{1\nu} - u_{2\nu}| \|\mathbf{u}_{2\tau}\| - \|\mathbf{u}_{1\tau}\| da. \end{aligned}$$

Ensuite, à l'aide des inégalités élémentaires suivantes

$$|u_{1\nu} - u_{2\nu}| \leq \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|, \quad \|\mathbf{u}_{1\tau}\| - \|\mathbf{u}_{2\tau}\| \leq \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

nous en déduisons, à l'aide de (2.4), que

$$(4.31) \quad \begin{aligned} & j(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) \\ &\leq c_0^2 (p_0 m_\mu + \mu_0 L_p) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2. \end{aligned}$$



Soit

$$(4.32) \quad \alpha_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2}.$$

et notons que  $\alpha_0$  ne dépend que de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  et  $\mathcal{F}$ . Si (4.20) est vérifié alors il résulte de (4.30)–(4.32) que  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Nous concluons cette section par quelques commentaires sur le Théorème 4.1. Tout d'abord, il découle de ce théorème que le Problème de contact  $\mathcal{P}$  a au moins une solution au sens faible  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ , avec les hypothèses (4.7)–(4.11). La solution faible est unique si, en plus de cela, l'hypothèse de petitesse (4.20) est vérifiée. Il découle de (4.1) et (4.7) que  $\boldsymbol{\sigma} \in Q$ . De plus, puisque

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega$$

et, avec l'hypothèse (4.8), nous avons que  $\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d$ . La solution faible a donc pour régularité  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in U \times Q_1$ .

Essuite, nous rappelons que la condition (4.11)(e) traduit la condition de monotonie relaxée, se référer [100] pour plus de détails. Cette condition est satisfaite pour  $m_\mu = 0$  si  $r \mapsto \mu(\mathbf{x}, r)$  est une fonction croissante, p.p.  $\mathbf{x} \in \Gamma_3$ . Notez que, dans ce cas, l'hypothèse de petitesse (4.20) peut aussi se lire  $\mu_0 L_p < \alpha_0$  et pourrait de ce fait être interprétée comme une hypothèse de petitesse sur le coefficient de frottement  $\mu$ . Elle est également satisfaite si  $r \mapsto \mu(\mathbf{x}, r)$  est une fonction uniformément continue Lipschitzienne de la variable d'espace, i.e.

$$(4.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } L_\mu > 0 \text{ tel que} \\ |\mu(\mathbf{x}, r_1) - \mu(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\mu |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

En effet, il est facile de voir que dans ce cas (4.11)(e) est vérifié avec  $m_\mu = L_\mu$ . De ce fait, (4.20) se lit  $p_0 L_\mu + \mu_0 L_p < \alpha_0$ .

### 4.3 Formulation duale

L'objectif de cette section est d'étudier le problème dual du Problème  $\mathcal{P}$  en considérant cette fois le Problème  $\mathcal{P}'$ , i.e. un cas particulier du Problème  $\mathcal{P}$ , qui ne diffère de ce dernier que par la condition (4.6) pour laquelle nous prenons  $\mu$  constant. Pour plus de détails sur la notion de dualité dans le cadre de la mécanique du contact, nous renvoyons le lecteur à [92]. Ainsi, en lieu et place de (4.11), nous utiliserons la condition suivante pour cette section

$$(4.34) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Notre objectif dans ce qui suit est d'obtenir une seconde formulation variationnelle du problème  $\mathcal{P}'$ . Pour ce faire, nous nous devons d'introduire tout d'abord l'hypothèse suivante sur la géométrie du problème

$$(4.35) \quad \text{il existe } \boldsymbol{\theta} \in V \text{ tel que } \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\nu} \text{ sur } \Gamma_3,$$

hypothèse que nous illustrons par les exemples suivants.

**Exemple 4.2.** Soient

$$\begin{aligned} \Omega &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1 \}, \\ \Gamma_1 &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x_1 \leq 0, \ x_2 \leq 0 \}, \\ \Gamma_3 &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \}, \end{aligned}$$

et considérons la fonction  $\boldsymbol{\theta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\boldsymbol{\theta}(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1, x_2) & \text{si } x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \\ (0, x_2) & \text{si } x_1 \leq 0, \ x_2 \geq 0, \\ (0, 0) & \text{si } x_1 \leq 0, \ x_2 \leq 0, \\ (x_1, 0) & \text{si } x_1 \geq 0, \ x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Alors,  $\boldsymbol{\theta} \in H^1(\Omega)^2$ ,  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_1$  et  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\nu}$  sur  $\Gamma_3$ , i.e.  $\boldsymbol{\theta}$  satisfait l'hypothèse (4.35).

**Exemple 4.3.** Soient  $a, b, c, 3$  constantes positives et soient

$$\begin{aligned} \Omega &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < a, \ 0 < x_2 < b, \ 0 < x_3 < c \}, \\ \Gamma_1 &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq a, \ 0 \leq x_2 \leq b, \ x_3 = c \}, \\ \Gamma_3 &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq a, \ 0 \leq x_2 \leq b, \ x_3 = 0 \}. \end{aligned}$$

Considérons la fonction  $\boldsymbol{\theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\boldsymbol{\theta}(x_1, x_2, x_3) = \left( 0, 0, \frac{x_3 - c}{c} \right).$$

Alors,  $\boldsymbol{\theta} \in H^1(\Omega)^2$ ,  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_1$  et  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\nu}$  sur  $\Gamma_3$ , i.e.  $\boldsymbol{\theta}$  satisfait également l'hypothèse (4.35).

Nous nous intéressons maintenant à la formulation variationnelle du Problème  $\mathcal{P}'$ . L'ensemble des déplacements admissibles  $U$  et l'élément  $\mathbf{f} \in V$  sont ceux présentés

au début du Chapitre en (4.12) et (4.15), respectivement. Par contre, la fonction  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est maintenant définie comme suit

$$(4.36) \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu \, da + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| \, da \quad \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \in V.$$

De là, en suivant la même méthode que dans la première partie du Chapitre, on obtient la formulation variationnelle suivante du problème de contact frottant  $\mathcal{P}'$ .

**Problème  $\mathcal{P}'_V$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u}$  tel que*

$$(4.37) \quad \mathbf{u} \in U, \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Notons que ce Problème  $\mathcal{P}'_V$ , ayant d'ailleurs une forme analogue à celle du Problème  $\mathcal{P}_V$ , est encore une fois formulé en terme de déplacement. Il s'agit de la formulation variationnelle dite primale du problème  $\mathcal{P}'$ . Nous cherchons maintenant à obtenir une autre formulation variationnelle du problème  $\mathcal{P}'$  mais faisant cette fois intervenir la contrainte. On parle alors de formulation variationnelle duale du problème  $\mathcal{P}'$ .

Avec cet objectif en tête notons déjà que, puisque  $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ , l'image de l'opérateur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon} : V \rightarrow Q$ , noté  $\boldsymbol{\varepsilon}(V)$ , est une partie fermée de  $Q$ . Une preuve de ce résultat figure dans [136] page 87. C'est une conséquence directe de l'égalité

$$(4.38) \quad \|\mathbf{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_Q \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Soit  $P : Q \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(V)$  l'opérateur de projection sur  $\boldsymbol{\varepsilon}(V) \subset Q$  et remarquons que l'égalité (4.38) montre que l'opérateur  $\boldsymbol{\varepsilon} : V \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(V)$  est inversible. De plus, l'hypothèse (4.7) implique que  $\mathcal{F} : Q \rightarrow Q$  est un opérateur continu Lipschitzien fortement monotone et, de ce fait, en utilisant la Proposition 1.25 dans [136] il s'ensuit qu'il est inversible. En outre l'inverse de  $\mathcal{F}$ , noté  $\mathcal{F}^{-1}$ , est encore un opérateur continu Lipschitzien fortement monotone. Par suite, nous pouvons utiliser l'opérateur  $\Lambda : Q \rightarrow V$  défini par

$$(4.39) \quad \Lambda \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} P \mathcal{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in Q.$$

L'intérêt de cet opérateur réside dans le fait qu'il facilite l'inversion de la loi constitutive élastique, comme montré ci dessous.

**Lemme 4.4.** *Supposons que (4.7) est satisfait et soient  $\boldsymbol{\sigma} \in Q$ ,  $\mathbf{v} \in V$  tels que  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ . Alors  $\mathbf{u} = \Lambda \boldsymbol{\sigma}$ .*

**Démonstration.** L'égalité  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  donne que  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$  et, de ce fait, puisque  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in \boldsymbol{\varepsilon}(V)$  nous avons  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = P\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = P\mathcal{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$  ce qui implique que  $\mathbf{u} =$

$\varepsilon^{-1}P\mathcal{F}^{-1}\sigma$ . Combinons cette égalité avec la définition (4.39) pour constater que  $\mathbf{u} = \Lambda\sigma$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Nous définissons ensuite  $\tilde{\mathbf{g}} \in V$  donné par

$$(4.40) \quad \tilde{\mathbf{g}} = g\boldsymbol{\theta} \in V,$$

avec  $g$ , une constante positive. Par ailleurs, pour chaque  $\boldsymbol{\eta} \in V$  nous considérons la partie  $\Sigma(\boldsymbol{\eta}) \subset Q$  donnée par

$$(4.41) \quad \Sigma(\boldsymbol{\eta}) = \{\boldsymbol{\tau} \in Q : (\boldsymbol{\tau}, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) \geq (f, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}})_V \ \forall \mathbf{v} \in U\}.$$

Enfin, nous considérons le problème variationnel suivant

**Problème  $\mathcal{P}'_V^D$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\sigma$  tel que*

$$(4.42) \quad \sigma \in \Sigma(\Lambda\sigma), \quad (\mathcal{F}^{-1}\sigma, \boldsymbol{\tau} - \sigma)_Q \geq (\varepsilon(\tilde{\mathbf{g}}), \boldsymbol{\tau} - \sigma)_Q \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\Lambda\sigma).$$

Dans ce qui suit,  $\mathcal{P}'_V^D$  est désigné comme le problème variationnel dual de  $\mathcal{P}'$ . A ce stade, notons déjà que  $\mathcal{P}'_V$  et  $\mathcal{P}'_V^D$  sont tous deux exprimés en terme d'inégalités quasivariationnelles elliptiques dans lesquelles l'inconnue est respectivement le champ de déplacements et le champ de contraintes. Pour le problème  $\mathcal{P}'_V$ , l'espace des contraintes est connu mais le problème fait intervenir  $j$  qui dépend de la solution. Pour le problème  $\mathcal{P}'_V^D$  il n'y a aucune fonction de ce type mais, en contrepartie, l'ensemble des contraintes admissibles dépend de la solution.

Nous terminons cette partie par deux résultats préliminaires qui seront utilisés par la suite.

**Lemme 4.5.** *Supposons que (4.10), (4.34) et (4.35) sont satisfaits. Alors, l'élément  $\tilde{\mathbf{g}}$  défini dans (4.40) satisfait les propriétés suivantes.*

$$(4.43) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} & \tilde{\mathbf{g}} \in U. \\ \text{(b)} & 2\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}} \in U \quad \forall \mathbf{v} \in U. \\ \text{(c)} & \lambda(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) \in U \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in U. \\ \text{(d)} & j(\mathbf{v}, 2\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) + j(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{g}}) = 2j(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in U. \\ \text{(e)} & j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{g}}) = j(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U. \end{array} \right.$$

**Démonstration.** Utilisons (4.35) pour voir que  $\theta_\nu = 1$  sur  $\Gamma_3$  et, de ce fait, (4.40) implique que  $\tilde{g}_\nu = g$  sur  $\Gamma_3$ , ce qui montre que  $\tilde{\mathbf{g}} \in U$ . Soient  $\mathbf{v} \in V$  et  $\lambda \geq 0$ , alors

$2v_\nu - \tilde{g}_\nu \leq g$  et  $\lambda(v_\nu - \tilde{g}_\nu) \leq 0$  sur  $\Gamma_3$  d'où  $2\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}} \in U$  et  $\lambda(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) \in U$ , respectivement. Nous en déduisons les propositions (4.43)(a)–(c).

Ensuite, nous utilisons (4.40) pour voir que  $\tilde{\mathbf{g}}_\tau = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_3$  ce qui implique que

$$(4.44) \quad \|2\mathbf{v}_\tau - \tilde{\mathbf{g}}_\tau\| = 2\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\tilde{\mathbf{g}}_\tau\|, \quad \|\mathbf{v}_\tau - \tilde{\mathbf{g}}_\tau\| = \|\mathbf{v}_\tau\| - \|\tilde{\mathbf{g}}_\tau\| \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous combinons maintenant la définition (4.36) avec les égalités (4.44) pour voir que les propositions (4.43) (d)–(e) sont satisfaites ce qui, par conséquent, achève la démonstration.  $\square$

**Lemme 4.6.** *Supposons que (4.10) et (4.34) sont satisfaites et soit  $j$  la fonction donnée par (4.36). Alors, pour chaque  $\mathbf{u} \in V$  il existe  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}) \in V$  tel que*

$$(4.45) \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

**Démonstration.** Soit  $\mathbf{u} \in V$  et désignons par  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{u})$  la fonction définie par

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{u}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} & \text{si } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Alors, pour tout  $\mathbf{v} \in V$  nous avons

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) \leq \|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\| \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

De là, nous en déduisons que

$$\int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu) (\|\mathbf{v}_\tau\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) da \geq \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu) \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) da \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

et, en utilisant (4.36)

$$(4.46) \quad \begin{aligned} j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\geq \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)(v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu) \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) da \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Ensuite nous appliquons le théorème de représentation de Riesz afin de mettre en évidence qu'il existe un unique élément  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}) \in V$  tel que

$$(4.47) \quad (\boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}), \mathbf{v})_V = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu) \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}_\tau da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous combinons enfin (4.46) et (4.47) pour obtenir (4.45), achevant ainsi la démonstration.  $\square$

Notons que le Lemme 4.6 permet d'établir la sous-différentiabilité de la fonction  $\mathbf{v} \mapsto j(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  au point  $\mathbf{v}$ , pour chaque  $\mathbf{u} \in V$ , d'après un résultat classique portant sur la sous-différentiabilité des fonctions semi-continues inférieures.

### 4.3.1 Résultat d'équivalence

Nous étudions maintenant le lien entre les Problèmes variationnels  $\mathcal{P}'_V$  et  $\mathcal{P}'^D_V$ . Le théorème d'équivalence suivant constitue le résultat principal de la section.

**Théorème 4.7.** *Sous les conditions (4.7), (4.8), (4.10), (4.34) et (4.35), les affirmations suivantes sont vérifiées :*

- 1) *Si  $\mathbf{u}$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}'_V$  et que  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ , alors  $\boldsymbol{\sigma}$  est solution du problème  $\mathcal{P}'^D_V$ .*
- 2) *Inversement, si  $\boldsymbol{\sigma}$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}'^D_V$ , alors il existe un unique  $\mathbf{u} \in V$  tel que  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  et, de plus,  $\mathbf{u}$  est solution du Problème  $\mathcal{P}'_V$ .*

**Démonstration.** 1) Soit  $\mathbf{u}$ , une solution du Problème  $\mathcal{P}'_V$  et posons  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ . Alors le Lemme 4.4 implique que

$$(4.48) \quad \mathbf{u} = \Lambda \boldsymbol{\sigma}$$

et, de plus, grâce à (4.37) on peut écrire que

$$(4.49) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Nous prenons  $\mathbf{v} = 2\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}$  et  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{g}}$  dans (4.49) et nous utilisons les égalités (4.43)(d), (e) pour obtenir

$$(4.50) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}})_V.$$

Ensuite, nous ajoutons membre à membre (4.49) et (4.50) et utilisons (4.43)(e) pour voir que

$$(4.51) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Nous combinons maintenant (4.51) et la définition (4.41) pour en déduire que

$$(4.52) \quad \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\mathbf{u}).$$

De plus, (4.41) et (4.50) impliquent que

$$(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\mathbf{u})$$

et, puisque  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$ , nous en déduisons que

$$(4.53) \quad (\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_Q \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\mathbf{u}).$$

Nous combinons maintenant (4.48), (4.52) et (4.53) pour en déduire que  $\boldsymbol{\sigma}$  est une solution de  $\mathcal{P}'_V$ , ce qui conclut la première partie de cette démonstration.

2) Supposons maintenant que  $\boldsymbol{\sigma}$  satisfasse (4.42) et considérons un élément  $\mathbf{z} \in Q$  tel que

$$(4.54) \quad (\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

**Remarque 4.8.** L'ensemble des éléments qui satisfont l'égalité (4.54) est non vide puisque l'élément nul la vérifie.

Alors, en utilisant (4.41) nous en déduisons que  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \pm \mathbf{z} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma})$  et, en injectant successivement les deux égalités  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{z} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma})$  et  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{z} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma})$  dans (4.42), nous en déduisons que

$$(4.55) \quad (\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}), \mathbf{z})_Q = 0.$$

D'autre part, puisque  $\boldsymbol{\varepsilon}(V)$  est un sous-espace fermé de  $Q$  nous en déduisons que

$$(4.56) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(V)^{\perp\perp} = \boldsymbol{\varepsilon}(V)$$

où le symbole  $\perp$  indique le complément orthogonal dans  $Q$ . En utilisant (4.54) et (4.55) nous voyons que  $\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}) \perp \mathbf{z}$  pour tout  $\mathbf{z} \in \boldsymbol{\varepsilon}(V)^{\perp}$  et, d'après (4.56) il s'ensuit que  $\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}) \in \boldsymbol{\varepsilon}(V)$ . Par conséquent, il existe  $\tilde{\mathbf{u}} \in V$  tel que  $\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}})$ . Soit  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{g}}$ . Alors  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$ , i.e.  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ . Cela prouve l'existence. L'unicité de  $\mathbf{u}$  provient de l'égalité (4.38). En outre, le Lemme 4.4 donne que

$$(4.57) \quad \Lambda\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{u}.$$

Ensuite, démontrons que  $\mathbf{u}$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}'_V$ ; nous commençons par prouver que  $\mathbf{u} \in U$ . Soit  $P_U : V \rightarrow U$ , le projecteur sur la partie convexe fermée non vide  $U \subset V$ . Par l'absurde, supposons dans ce qui suit que

$$(4.58) \quad \mathbf{u} \notin U.$$

Alors  $\mathbf{u} \neq P_U \mathbf{u}$ , i.e.

$$(4.59) \quad (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, P_U \mathbf{u} - \mathbf{u})_V > 0.$$

Ensuite, en utilisant (4.59) et la caractérisation variationnelle de la projection (2.10) nous avons

$$(P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v})_V \geq (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, P_U \mathbf{u})_V > (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Ces inégalités impliquent qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$(4.60) \quad (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v})_V > \alpha > (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U$$

et, en utilisant (4.43)(c) avec  $\lambda = 1$  il s'ensuit que

$$(4.61) \quad (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}})_V > \alpha > (P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Soit  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\varepsilon}(P_U \mathbf{u} - \mathbf{u}) \in Q$ . Alors (4.61) donne

$$(4.62) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q > \alpha > (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q \quad \forall \mathbf{v} \in U$$

et, en prenant  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{g}}$  dans l'inégalité précédente, nous obtenons que

$$(4.63) \quad \alpha < 0.$$

Supposons maintenant qu'il existe  $\tilde{\mathbf{v}} \in U$  tel que

$$(4.64) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q < 0.$$

Nous utilisons la propriété (4.43)(c) et injectons  $\mathbf{v} = \lambda(\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{g}})$  dans (4.62), avec  $\lambda \geq 0$ . De là, nous obtenons

$$\lambda(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q > \alpha + (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q \quad \forall \lambda > 0.$$

Par suite, en passant à la limite avec  $\lambda \rightarrow \infty$ , et en utilisant (4.64) nous en déduisons que

$$-\infty \geq \alpha + (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q$$

ce qui contredit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . De ce fait, nous avons

$$(4.65) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$



Ensuite, l'égalité (4.57) combinée avec la régularité  $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma})$  et la définition (4.41) implique que

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Par conséquent, en utilisant (4.65) nous en déduisons que  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\mathbf{u})$ . Nous pouvons alors considérer  $\boldsymbol{\tau} = \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\sigma}$  dans (4.42) pour trouver que

$$(\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\tau}})_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}), \tilde{\boldsymbol{\tau}})_Q.$$

Nous utilisons maintenant l'égalité  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  pour obtenir

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \tilde{\boldsymbol{\tau}})_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}), \tilde{\boldsymbol{\tau}})_Q$$

et, puisque  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\varepsilon}(P_U\mathbf{u} - \mathbf{u}) \in Q$ , nous trouvons que

$$(4.66) \quad (P_U\mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u})_V \geq (P_U\mathbf{u} - \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{g}})_V.$$

D'autre part, en prenant  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{g}}$  dans (4.60), nous obtenons

$$(4.67) \quad (P_U\mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u})_V < (P_U\mathbf{u} - \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{g}})_V.$$

Les inégalités (4.66) et (4.67) aboutissent à une contradiction. Par conséquent, nous en déduisons que l'hypothèse (4.58) est fausse. De ce fait

$$(4.68) \quad \mathbf{u} \in U.$$

Ensuite, nous désignons par

$$(4.69) \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f} - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}))$$

où  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{u})$  est l'élément défini par le Lemme 4.6. Alors, en utilisant (4.45), nous avons

$$(4.70) \quad (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Notons que (4.43)(a) et (b) autorisent à prendre  $\mathbf{v} = 2\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}$  et  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{g}}$  dans (4.70). Par conséquent, en utilisant l'égalité (4.43)(d), nous obtenons

$$(4.71) \quad (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}})_V.$$

A présent, nous combinons (4.70) et (4.71) et utilisons également (4.43)(e) pour voir que

$$(4.72) \quad (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Cette inégalité implique que  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \in \Sigma(\mathbf{u})$  et, en utilisant (4.57), cela montre que  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma})$ . Par suite, en injectant  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$  dans (4.42) nous avons

$$(\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma})_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma})_Q$$

et, dans la mesure où  $\mathcal{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ , il s'ensuit que

$$(4.73) \quad (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q \geq (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q.$$

Ensuite, nous combinons (4.71) et (4.73) pour déduire que

$$(4.74) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}})_V \geq (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}).$$

Enfin, dans la mesure où  $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\Lambda\boldsymbol{\sigma})$ , (4.57) implique que  $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\mathbf{u})$  et, par conséquent, puisque  $\mathbf{u} \in U$ , (4.41) montre que

$$(4.75) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}})_V \leq (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}).$$

Ainsi

$$(\mathbf{f}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}})_V = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}),$$

i.e.

$$(4.76) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q - j(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}) = (\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{u})_V.$$

D'autre part, puisque  $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma(\mathbf{u})$  nous avons

$$(4.77) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{g}}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U,$$

Nous ajoutons maintenant membre à membre (4.76) et (4.77) pour obtenir que

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{g}}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{g}}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

et, en utilisant (4.43)(e), il en résulte que

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Enfin, puisque  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ , nous trouvons que

$$(4.78) \quad (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Nous combinons maintenant l'inégalité (4.78) avec le résultat (4.68) pour voir que  $\mathbf{u}$  est effectivement une solution du Problème  $\mathcal{P}'_V$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

### 4.3.2 Résultats d'existence et d'unicité

Nous poursuivons maintenant avec l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution aux problèmes  $\mathcal{P}'_V$  et  $\mathcal{P}'^D_V$ . Le résultat principal de cette section est le suivant.

**Théorème 4.9.** *Sous les conditions (4.7), (4.8), (4.10) et (4.34), les propositions suivantes sont vérifiées.*

- 1) *Le Problème  $\mathcal{P}'_V$  admet au moins une solution.*
- 2) *Il existe une constante  $\alpha_0$  qui dépend uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  et  $\mathcal{F}$  telle que la solution au Problème  $\mathcal{P}'_V$  soit unique, si*

$$(4.79) \quad L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \alpha_0.$$

- 3) *Sous l'hypothèse (4.35), le Problème  $\mathcal{P}'^D_V$  admet au moins une solution.*
- 4) *Sous les hypothèses (4.35) et (4.79), le Problème  $\mathcal{P}'^D_V$  admet une unique solution.*
- 5) *Sous les hypothèses (4.35) et (4.79), les solutions respectives des Problèmes  $\mathcal{P}'_V$  et  $\mathcal{P}'^D_V$ , obtenue au points 2) et 4), respectivement, sont reliées par la loi constitutive élastique  $\sigma = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u})$ .*

**Démonstration.** 1) et 2) La démonstration de ces deux points a déjà été effectuée pour le Problème  $\mathcal{P}_V$  et, dans la mesure où le problème  $\mathcal{P}'_V$  étudié dans cette section n'en est qu'un cas particulier, il n'est pas nécessaire d'avancer d'argument supplémentaire pour obtenir les résultats attendus.

3) Supposons que (4.35) est vérifié. Désignons par  $\mathbf{u}$  une solution du Problème  $\mathcal{P}'_V$  dont l'existence est garantie par 1) et considérons  $\sigma = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u})$ . Alors, en utilisant le Théorème 4.7 1) nous obtenons que  $\sigma$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}'^D_V$  ce qui achève la démonstration.

4) Supposons maintenant que (4.35) et (4.79) soient vérifiés et considérons  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , deux solutions du Problème  $\mathcal{P}'^D_V$ . Alors, d'après le Théorème 4.7 2), il existe deux éléments  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$  tels que

$$(4.80) \quad \sigma_1 = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_1), \quad \sigma_2 = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_2).$$

De plus,  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont solutions du problème  $\mathcal{P}_V$ . En utilisant maintenant l'hypothèse de petitesse (4.79) ainsi que 2), nous en déduisons que

$$(4.81) \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2.$$

Nous combinons (4.80) et (4.81) pour voir que  $\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2$ , ce qui achève la démonstration.

5) Soit  $\mathbf{u}$ , une solution du Problème  $\mathcal{P}'_V$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ , une solution du Problème  $\mathcal{P}'^D_V$ . Soit

$$(4.82) \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}).$$

Alors le Théorème 4.7 1) garantit que  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  est une solution du problème  $\mathcal{P}'^D_V$ . L'unicité de la solution démontrée en 4) permet de dire que

$$(4.83) \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}.$$

Les égalités (4.82) et (4.83) impliquent que  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ . □

Supposons dans ce qui suit que (4.7), (4.8), (4.10), (4.34), (4.35) et (4.79) sont vérifiés. Alors le Théorème 4.7 nous garantit l'unicité de la solution à la fois dans le cas de la formulation variationnelle primale  $\mathcal{P}'_V$  et dans le cas de la formulation variationnelle duale  $\mathcal{P}'^D_V$ . De plus, cela montre que si le champ de déplacements  $\mathbf{u}$  est solution de la formulation variationnelle primale  $\mathcal{P}'_V$  et que le champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est solution de la formulation variationnelle duale  $\mathcal{P}'^D_V$ , alors  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont reliés par la loi constitutive élastique  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ . La paire  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  est alors désignée sous l'appellation *solution faible* du problème de contact avec frottement  $\mathcal{P}'_V$  et nous en concluons que ce problème a une unique solution faible. Notons, par ailleurs, que la condition (4.79) représente une inégalité de petitesse pour le coefficient de frottement. Quant à savoir si cette condition représente une caractéristique intrinsèque du problème de contact frottant  $\mathcal{P}'$  ou s'il s'agit juste d'une limitation inhérente à nos outils mathématiques, la question reste à ce jour ouverte. Pour finir, précisons que bien que les simulations numériques figurant dans ce Chapitre soient basées sur la formulation en déplacement, i.e. primale, il a déjà été proposé dans [86, 87] des résultats numériques obtenus via la formulation duale, autrement dit en contraintes.

## 4.4 Un résultat de convergence

Revenons maintenant au problème d'origine, à savoir le Problème  $\mathcal{P}_V$ , et intéressons nous au comportement de la solution lorsque l'on introduit une perturbation dans les données. De nombreux cas pourraient être considérés mais, par soucis de simplicité, nous nous limiterons à démontrer que la solution dépend continûment de la fonction de compliance normale  $p$  ainsi que des densités de force volumique et de traction surfacique  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_2$ , respectivement. Par conséquent, on suppose dans ce qui

suit que (4.7)–(4.11) et (4.20) sont vérifiés et nous désignons par  $\mathbf{u}$  la solution du Problème  $\mathcal{P}_V$  obtenue via le Théorème 4.1. Pour chaque  $\rho > 0$  soient  $p_\rho$ ,  $\mathbf{f}_{0\rho}$  et  $\mathbf{f}_{2\rho}$ , les perturbations de  $p$ ,  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_2$ , respectivement, qui satisfont les conditions (4.7) et (4.10), respectivement. Nous considérons alors la perturbation suivante du Problème variationnel  $\mathcal{P}_V$ .

**Problème  $\mathcal{P}_V^\rho$ .** *Trouver un champ de déplacements approché  $\mathbf{u}_\rho$  tel que*

$$(4.84) \quad \mathbf{u}_\rho \in U, \quad (A\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho)_V + j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) \geq (\mathbf{f}_\rho, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho)_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Dans ce qui va suivre les fonctions  $j_\rho$  et  $\mathbf{f}_\rho$  sont définies par les égalités (4.14) et (4.15) dans lesquelles  $p$ ,  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_2$  sont remplacés par  $p_\rho$ ,  $\mathbf{f}_{0\rho}$  et  $\mathbf{f}_{2\rho}$ , respectivement, i.e.

$$(4.85) \quad j_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p_\rho(u_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| da \quad \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V,$$

$$(4.86) \quad (\mathbf{f}_\rho, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_{0\rho} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2\rho} \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Alors, d'après le Théorème 4.1, pour chaque  $\rho > 0$ , le Problème  $\mathcal{P}_V^\rho$  a une unique solution  $\mathbf{u}_\rho$ . Considérons maintenant les hypothèses suivantes :

$$(4.87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tel que} \\ \text{(a) } |p_\rho(\mathbf{x}, r) - p(\mathbf{x}, r)| \leq G(\rho)(|r| + 1) \\ \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \text{ pour chaque } \rho > 0, \\ \text{(b) } \lim_{\rho \rightarrow 0} G(\rho) = 0. \end{array} \right.$$

$$(4.88) \quad \mathbf{f}_{0\rho} \rightarrow \mathbf{f}_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)^d \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

$$(4.89) \quad \mathbf{f}_{2\rho} \rightarrow \mathbf{f}_2 \quad \text{dans } L^2(\Gamma_2)^d \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Nous avons le résultat de convergence suivant, qui constitue le résultat principal de cette section.

**Théorème 4.10.** *Sous les conditions (4.87)–(4.89) et sous réserve que le problème  $\mathcal{P}_V$  admette une unique solution, la solution  $\mathbf{u}_\rho$  du Problème  $\mathcal{P}_V^\rho$  converge vers la solution  $\mathbf{u}$  du Problème  $\mathcal{P}_V$ , i.e.*

$$(4.90) \quad \mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } U \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

**Démonstration.** Soit  $\rho > 0$ . Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  dans (4.84),  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\rho$  dans (4.19), puis nous ajoutons membre à membre les inégalités obtenues pour trouver

$$(4.91) \quad (A\mathbf{u}_\rho - A\mathbf{u}, \mathbf{u}_\rho - \mathbf{u})_V \leq j(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\rho) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) + (\mathbf{f}_\rho - \mathbf{f}, \mathbf{u}_\rho - \mathbf{u})_V.$$

Nous estimons maintenant chaque terme de l'inégalité précédente. En utilisant (4.11), (4.14) et (4.85) il se trouve que

$$\begin{aligned} & j(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\rho) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) \\ &= \int_{\Gamma_3} \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p(u_\nu) (\|\mathbf{u}_{\rho\tau}\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \mu(\|\mathbf{u}_{\rho\tau}\|) p_\rho(u_{\rho\nu}) (\|\mathbf{u}_\tau\| - \|\mathbf{u}_{\rho\tau}\|) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} \mu_0(p(u_\nu) - p_\rho(u_{\rho\nu})) (\|\mathbf{u}_{\rho\tau}\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) da. \end{aligned}$$

Par conséquent, en écrivant

$$\begin{aligned} & p(u_\nu) - p_\rho(u_{\rho\nu}) \\ &= p(u_\nu) - p(u_{\rho\nu}) + p(u_{\rho\nu}) - p_\rho(u_{\rho\nu}) \end{aligned}$$

et en utilisant (2.4), (4.10) et (4.87), après calcul, nous trouvons que

$$(4.92) \quad \begin{aligned} & j(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\rho) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) \\ &\leq c_0^2 L_p \mu_0 \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V^2 + c_0^2 \mu_0 G(\rho) \|\mathbf{u}_\rho\|_V \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V \\ &+ c_0 \mu_0 G(\rho) (\text{mes}(\Gamma_3)^{1/2}) \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V. \end{aligned}$$

Enfin en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous obtenons que

$$(4.93) \quad (\mathbf{f}_\rho - \mathbf{f}, \mathbf{u}_\rho - \mathbf{u})_V \leq \|\mathbf{f}_\rho - \mathbf{f}\|_V \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V.$$

Alors, en combinant les résultats de (4.91)–(4.93) et (4.21), nous déduisons que

$$(4.94) \quad \begin{aligned} & (m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \mu_0) \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V \\ &\leq c_0 \mu_0 G(\rho) (\text{mes}(\Gamma_3)^{1/2} + c_0 \|\mathbf{u}_\rho\|_V) + \|\mathbf{f}_\rho - \mathbf{f}\|_V. \end{aligned}$$

Si l'on considère à présent l'hypothèse de petitesse (4.79),  $m_{\mathcal{F}} > c_0^2(p_0 m_\mu + \mu_0 L_p) > c_0^2 L_p \mu_0$ , il découle de ce qui précède que

$$(4.95) \quad \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V \leq c_1 G(\rho)(1 + \|\mathbf{u}_\rho\|_V) + \|\mathbf{f}_\rho - \mathbf{f}\|_V$$

où  $c_1$  est une constante positive qui ne dépend pas de  $\rho$ .

Maintenant, nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$  dans (4.84) et utilisons (4.7)(c) pour voir que

$$m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_\rho\|_V^2 \leq (\mathbf{f}_\rho, \mathbf{u}_\rho)_V - (\mathcal{F}\mathbf{0}_Q, \epsilon(\mathbf{u}_\rho))_Q,$$

ce qui implique que

$$(4.96) \quad \|\mathbf{u}_\rho\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{F}}} (\|\mathbf{f}_\rho\|_V + \|\mathcal{F}\mathbf{0}_Q\|_Q).$$

En outre, dans la mesure où  $\mathbf{f}_\rho \rightarrow \mathbf{f}$ , il existe une constante positive  $\alpha$  qui ne dépend pas de  $\rho$  tel que

$$\|\mathbf{f}_\rho\|_V \leq \alpha.$$

Par suite

$$(4.97) \quad \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V \leq c_1 G(\rho) \left(1 + \frac{1}{m_{\mathcal{F}}} (\alpha + \|\mathcal{F}\mathbf{0}_Q\|_Q)\right) + \|\mathbf{f}_\rho - \mathbf{f}\|_V.$$

Le résultat de convergence (4.90) n'est alors plus qu'une conséquence de l'inégalité (4.97) combinée avec les hypothèses (4.87), (4.88) et (4.89).  $\square$

## 4.5 Approximation numérique

Cette section, dont on peut retrouver les détails dans [23], est consacrée à la discrétisation du Problème  $\mathcal{P}_V$  et à l'obtention d'un résultat d'estimation théorique de l'erreur de discrétisation par éléments finis. Dans ce qui va suivre, nous supposons que (4.7)–(4.11) et (4.20) sont vérifiés et que par conséquent, d'après le Théorème 4.1, le Problème  $\mathcal{P}_V$  a une unique solution. L'approximation variationnelle du problème  $\mathcal{P}_V$  est basée sur une discrétisation par éléments finis dans laquelle nous considérons un domaine polyédrique  $\Omega$  et choisissons une famille d'éléments finis réguliers constituant une partition de  $\overline{\Omega}$ . Soit  $V^h \subset V$ , un espace de fonctions linéaires continues par morceaux qui s'annulent en  $\Gamma_1$ . Ici,  $h > 0$  désigne le paramètre de discrétisation spatiale. Soit  $U^h \subset V^h$ , une partie non vide, convexe, et fermée approchant  $U$ . Nous prendrons

le cas  $U^h \subset U$ . Soit  $V^h \subset V$ , un sous-espace d'éléments finis de fonctions linéaires par morceaux et compatibles avec la partition de la frontière  $\Gamma$ . Nous définissons l'ensemble

$$(4.98) \quad U^h = \{ \mathbf{v}^h \in V^h : v_\nu^h \leq g \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \}.$$

On considère ici l'ensemble de dimension finie  $U^h \subset U$  pour le domaine polygonal. La condition  $v_\nu^h \leq g$  sur la frontière  $\Gamma_3$  est satisfaite aux noeuds, i.e.,  $v_\nu^h \leq g^I$ , où  $g^I$  est la fonction d'interpolation linéaire de la fonction  $g$ .

Ensuite nous considérons le problème approché suivant pour le Problème  $\mathcal{P}_V$ .

**Problème  $\mathcal{P}_V^h$ .** *Trouver un champ de déplacements discret  $\mathbf{u}^h$  tel que*

$$(4.99) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^h \in U^h, \quad & (A\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)_V + j(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) \\ & \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in U^h. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses du Théorème 4.1, et avec des arguments similaires, il est facile de vérifier que le système discret (4.99) a une unique solution. Nous passons maintenant à l'analyse de l'erreur entre les solutions du Problème  $\mathcal{P}_V$  et  $\mathcal{P}_V^h$ .

**Théorème 4.11.** *Sous les conditions (4.7)–(4.11) et (4.20), il existe une constante  $c$  indépendante de  $h$  telle que*

$$(4.100) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \leq c \inf_{\mathbf{v}^h \in U^h} \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \right).$$

**Démonstration.** Selon (4.7)(c) et (4.10)(e), pour chaque  $\mathbf{v}^h \in U^h$ , nous avons

$$(4.101) \quad \begin{aligned} m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)\|_V^2 & \leq (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)) \\ & \leq (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)) + \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu) - p(u_\nu^h))(u_\nu - u_\nu^h) da \\ & = (A\mathbf{u} - A\mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \\ & = (A\mathbf{u} - A\mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{v}^h) + (A\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) - (A\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h). \end{aligned}$$

Nous utilisons alors (4.19) avec  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^h$  et (4.99) pour trouver que

$$(4.102) \quad \begin{aligned} (A\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) - (A\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) & \leq (A\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}) \\ & \quad + j(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) + j(\mathbf{u}, \mathbf{u}^h) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \mathbf{v}^h)_V. \end{aligned}$$



Alors avec (4.101) et (4.102),

$$(4.103) \quad m_{\mathcal{F}} \|\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{u}^h)\|_V^2 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &= (A\mathbf{u} - A\mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{v}^h), \\ R_2 &= (A\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}) + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u})_V, \\ R_3 &= j(\mathbf{u}, \mathbf{u}^h) - j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) + j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \\ R_4 &= j(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) + j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Maintenant nous cherchons une estimation de chacun des termes. Pour le premier, nous avons la même inégalité qu'en (4.22)

$$\begin{aligned} (4.104) \quad |R_1| &\leq \left| \int_{\Omega} (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}^h)) \cdot \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu) - p(u_\nu^h))(u_\nu - v_\nu^h) da \right| \\ &\leq L_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V + L_p \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V. \end{aligned}$$

Le second terme  $R_2$  peut être vu comme un résidu. Nous avons

$$\begin{aligned} R_2 &= \int_{\Omega} \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}) dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)(v_\nu^h - u_\nu) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p(u_\nu)(\|\mathbf{v}_\tau^h\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) da - (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u})_V. \end{aligned}$$

De là, nous pouvons obtenir l'estimation

$$\begin{aligned} (4.105) \quad |R_2| &\leq (\|\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u})\|_V + \|\mathbf{f}\|_V) \|\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h)\|_V \\ &\quad + (1 + \mu_0) \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

Par analogie avec (4.31), nous obtenons

$$(4.106) \quad |R_3| \leq c_0^2 (p_0 m_\mu + \mu_0 L_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V^2.$$

Pour le dernier terme  $R_4$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 (4.107) \quad |R_4| &= |j(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}) + j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h)| \\
 &= \left| \int_{\Gamma_3} (\mu(\|\mathbf{u}_\tau\|)p(u_\nu) - \mu(\|\mathbf{u}_\tau^h\|)p(u_\nu^h)) (\|\mathbf{u}_\tau\| - \|\mathbf{v}_\tau^h\|) da \right| \\
 &\leq \int_{\Gamma_3} |(\mu(\|\mathbf{u}_\tau\|)p(u_\nu) - \mu(\|\mathbf{u}_\tau^h\|)p(u_\nu^h))| \|\mathbf{u}_\tau - \mathbf{v}_\tau^h\| da \\
 &\leq \int_{\Gamma_3} |\mu(\|\mathbf{u}_\tau^h\|)(p(u_\nu) - p(u_\nu^h))| \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\| da \\
 &\quad + \int_{\Gamma_3} |\mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) - \mu(\|\mathbf{u}_\tau^h\|)| p(u_\nu) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\| da \\
 &\leq \mu_0 L_p \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)} + 2\mu_0 \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
 &\leq c_0^2 \mu_0 L_p \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V + 2\mu_0 \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}.
 \end{aligned}$$

Si  $\mu(\cdot)$  est continue Lipschitzienne avec une constante  $L_\mu$ , alors nous pouvons obtenir une estimation un peu plus fine pour ce terme, à savoir

$$|R_4| \leq c_0^2 (p_0 L_\mu + \mu_0 L_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V.$$

Sous l'hypothèse de petitesse (4.20), par absorption du troisième terme  $R_3$  (4.106), en utilisant l'inégalité élémentaire

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2, \quad \forall \delta > 0, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

nous pouvons prouver (4.100) aisément.  $\square$

Notons que nous obtenons l'estimation de l'erreur grâce à l'inégalité de la trace sur la frontière  $\Gamma_3$ ,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V = O\left(\sqrt{\inf_{\mathbf{v}^h \in U^h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V}\right).$$

C'est une estimation d'erreur du même ordre que celle présentée dans [20] pour un autre modèle mathématique de contact. Elle n'est toutefois pas optimale. Ci-dessous sont proposées des estimations d'erreur optimales avec une hypothèse d'extra-régularité de la solution.

**Théorème 4.12.** *Sous les hypothèses du Théorème 4.11 et avec  $\boldsymbol{\sigma}_\tau \in L^2(\Gamma_3)^d$ , il existe une constante  $c$  indépendante de  $h$  telle que,*

$$(4.108) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \leq c \inf_{\mathbf{v}^h \in U^h} \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_V + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \right).$$

**Démonstration.** Nous calculons une estimation de  $R_2$  avec une hypothèse d'extra régularité de la solution  $\boldsymbol{\sigma}_\tau \in L^2(\Gamma_3)^d$ . D'après l'égalité (4.16), nous avons

$$\begin{aligned} |R_2| &\leq \left| \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu^h - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau^h - \mathbf{u}_\tau) da \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) (v_\nu^h - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|) p(u_\nu) (\|\mathbf{v}_\tau^h\| - \|\mathbf{u}_\tau\|) da \right| \\ &\leq (\|\sigma_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d} + (1 + \mu_0) \|p(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq c \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

De là, nous obtenons le résultat (4.108).  $\square$

Pour effectuer l'estimation de l'erreur, supposons que

$$(4.109) \quad \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^d, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_3} \in H^2(\Gamma_3)^d.$$

Soit  $\Pi_h \mathbf{u} \in V_h$ , une interpolation linéaire par élément fini de la solution  $\mathbf{u}$ . Dans la mesure où la solution  $\mathbf{u}$  appartient à  $U$ , i.e.  $u_\nu \leq g$ , nous pouvons en déduire que  $\Pi_h \mathbf{u}$  appartient également à  $U^h$ .

L'application de la théorie standard sur l'interpolation en élément fini (cf. [43]) donne

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_V &\leq c h \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)^d}, \\ \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma_3)^N} &\leq c h^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Gamma_3)^d}. \end{aligned}$$

Par conséquent, sous l'hypothèse de régularité (4.109), nous avons l'estimation optimale de l'erreur suivante

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V \leq c h,$$

où la constante  $c$  est indépendante de  $h$ . La section suivante aura, entre autres, pour objet l'obtention d'une validation numérique de ce résultat.

## 4.6 Simulations numériques

Il s'agit maintenant de présenter quelques simulations numériques illustrant le comportement de la solution du problème de contact avec frottement  $\mathcal{P}_V$ . On s'intéressera en particulier à l'interprétation des résultats numériques ainsi qu'à la validation numérique de l'estimation de l'erreur et à l'illustration du résultat de convergence de la solution du problème perturbé obtenues dans les sections précédentes.

La solution numérique du problème  $\mathcal{P}_V$  est basée sur une procédure itérative qui conduit à une suite de problèmes convexes, comme dans [20] et [22]. Pour chaque itération de "convexification", le coefficient de frottement  $\mu(\|\mathbf{u}_\tau\|)$  est fixé à une valeur donnée qui dépend du déplacement tangentiel de la solution  $\mathbf{u}_\tau$  trouvée dans l'itération précédente. De ce fait, les outils classiques de programmation convexe sont alors utilisables sur chaque itération de "convexification". La procédure peut être décrite de la manière suivante :

Soient  $\epsilon > 0$  et  $\mathbf{u}^{h,(0)}$  données.

Pour  $m = 0, 1, \dots$ ,

**Problème  $\mathcal{P}_{V^c}^h$ .** Trouver un champ de déplacements discret  $\mathbf{u}^{h,(m+1)} \in V^h$ , un champ de contraintes normales discret  $\xi_\nu^{h,(m+1)} \in Y_\nu^h$  et un champ de contraintes tangentielles discret  $\xi_\tau^{h,(m+1)} \in Y_\tau^h$  tels que

$$(A\mathbf{u}^{h,(m+1)} - \mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_V = \int_{\Gamma_3} \xi_\nu^{h,(m+1)} \cdot \mathbf{v}_\nu^h d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \xi_\tau^{h,(m+1)} \cdot \mathbf{v}_\tau^h d\Gamma \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h \quad (4.110)$$

$$\text{avec } -\xi_\nu^{h,(m+1)} \in \partial\varphi_\nu(\Pi_h \mathbf{u}_\nu^{h,(m+1)}) + p(\Pi_h \mathbf{u}_\nu^{h,(m+1)}) \text{ sur } \Gamma_3 \quad (4.111)$$

$$\text{et } -\xi_\tau^{h,(m+1)} \in \mu(|\Pi_h \mathbf{u}_\tau^{h,(m)}|)p(\Pi_h \mathbf{u}_\nu^{h,(m+1)})\partial\varphi_\tau(\Pi_h \mathbf{u}_\tau^{h,(m+1)}) \text{ sur } \Gamma_3 \quad (4.112)$$

jusqu'à  $\|\mathbf{u}^{h,(m+1)} - \mathbf{u}^{h,(m)}\|_V \leq \epsilon \|\mathbf{u}^{h,(m)}\|_V$

et  $\|\xi^{h,(m+1)} - \xi^{h,(m)}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq \epsilon \|\xi^{h,(m)}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}$ .

Les fonctions  $\varphi_\nu$  et  $\varphi_\tau$  étant définies en (1.85) et (3.33), respectivement. Les problèmes itératifs convexes non différentiables résultants sont alors résolus par des méthodes classiques. D'autres méthodes numériques visant à traiter de tels problèmes, y compris la méthode "proximal bundle", peuvent être trouvées dans [59, 101, 102, 141]. D'autre part, les conditions de contact avec frottement sont considérées en utilisant une approche numérique basée sur la combinaison d'une méthode de pénalisation, pour traiter les conditions de compliance normale, et d'une méthode du Lagrangien augmenté pour le contact unilatéral, une fois que le seuil de pénétration  $g$  a été atteint. De ce fait, nous considérons des noeuds supplémentaires dans le maillage initial, ici fictifs, pour le traitement des multiplicateurs de Lagrange. La construction de ces noeuds dépend de l'élément de contact utilisé dans la discrétisation géométrique de  $\Gamma_3$ .

Pour l'exemple ci-dessous, il s'agit d'un élément "noeud-rigide", composé d'un noeud sur  $\Gamma_3$  et d'un noeud multiplicateur de Lagrange. Pour de plus amples informations sur l'étape de discrétisation et les aspects numériques du traitement du contact, comprenant en particulier des algorithmes similaires à ceux utilisés ici, nous pouvons nous référer à [79, 81, 88, 143].

**Exemple numérique.** Nous nous intéressons à un exemple numérique bi-dimensionnel décrivant la compression d'une balle contre une fondation (cf Figure 4.1 ). Nous considérons un domaine  $\Omega$  comme suit :

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 \leq 10^2\}, \\ \Gamma_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 10 - 5\sqrt{2}, (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 = 10^2\}, \\ \Gamma_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 20, (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 = 10^2\}, \\ \Gamma_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 10 - 5\sqrt{2}, (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 = 10^2\}.\end{aligned}$$

Le domaine  $\Omega$  représente la coupe transversale d'un corps déformable en trois dimensions soumis à l'action de forces de traction de manière à ce que l'hypothèse des contraintes planes soit vérifiée. Concernant les conditions de Dirichlet, la composante verticale est fixée à la valeur  $u_1$  sur le bord  $\Gamma_1$ . Ainsi,  $\mathbf{u}_1 = (0, u_1)$ . Les forces de traction verticale de densité  $\mathbf{f}_2$  agissent sur la partie

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 10 + 5\sqrt{2}, (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 = 10^2\}$$

de la frontière  $\Gamma_2$  alors que le reste de  $\Gamma_2$  est laissé libre. Nous supposons qu'aucune force volumique n'agit sur le corps  $\Omega$ . Pour la discretisation, nous avons utilisé 20312 éléments finis élastiques et 128 éléments de contact. Nous atteignons alors un total de 20954 degrés de liberté.

Le comportement du matériau est modélisé par une loi constitutive linéaire élastique dans laquelle le tenseur d'élasticité  $\mathcal{F}$  satisfait

$$(\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon})_{\alpha\beta} = \frac{E\kappa}{(1+\kappa)(1-2\kappa)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{\alpha\beta} + \frac{E}{1+\kappa}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2.$$

Avec  $E$ , le module de Young,  $\kappa$ , le coefficient de Poisson et  $\delta_{\alpha\beta}$  le symbole de Kronecker.

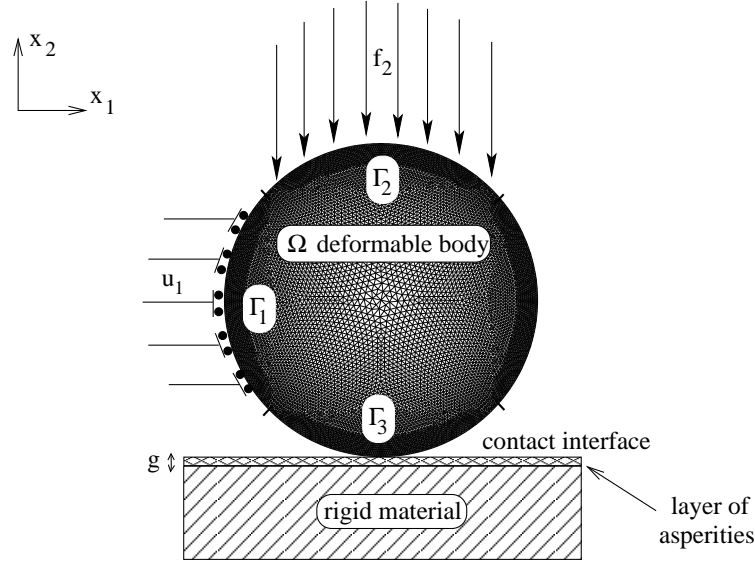


FIGURE 4.1 : Configuration initiale d'un exemple en dimension 2.

Pour les simulations numériques, nous considérons les données suivantes :

$$\begin{aligned}
 E &= 200GPa, \quad \kappa = 0.3, \\
 u_1 &= 1m, \quad \mathbf{f}_0 = (0, 0)GPa, \quad \mathbf{f}_2 = (-4, 0)GPa.m \quad \text{sur } \Gamma_2, \\
 \mathbf{f}_{0\rho} &= (0, -\rho)GPa, \quad \mathbf{f}_{2\rho} = (-(4 + \rho), 0)GPa.m \quad \text{sur } \Gamma_2, \\
 p(r) &= c_\nu[r]_+, \quad c_\nu = 10GPa, \quad g = 0.5m, \\
 p_\rho(r) &= (c_\nu + \rho)[r]_+.
 \end{aligned}$$

De plus, nous supposons que le coefficient de frottement satisfait l'égalité  $\mu = \mu(\|\mathbf{u}_\tau\|)$ , où  $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  étant la fonction non monotone donnée par

$$\mu(r) = (a - b) \cdot e^{-\alpha r} + b,$$

déjà introduite dans 1.4.4.

Nos résultats sont présentés dans les Figures 4.2 – 4.6 et sont décrits dans ce qui suit.

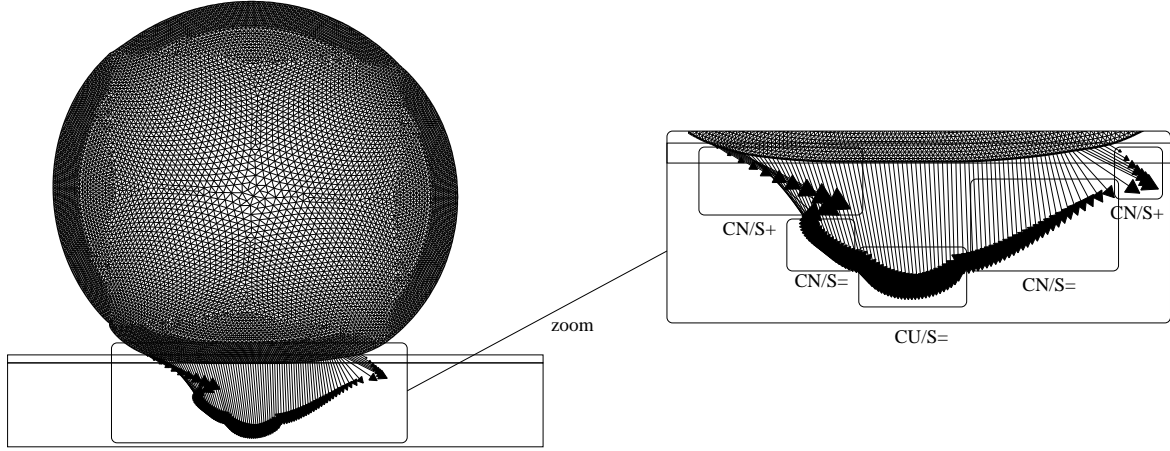


FIGURE 4.2 : Maillage déformé, forces de contact et statut de contact sur  $\Gamma_3$  pour  $a = 2$ ,  $b = 0.02$ ,  $\alpha = 1$ .

Tout d'abord, dans la Figure 4.2, le maillage déformé et les forces de contact sont représentés dans le cas  $a = 2$ ,  $b = 0.002$  et  $\alpha = 1$  correspondant à une loi de frottement non-monotone. Pour rappel, le contact suit une condition de compliancance normale associée à une loi de frottement sec de Coulomb tant que la pénétration est inférieure à la limite  $g = 0.5m$  et, quand cette limite est atteinte, il suit une condition unilatérale associée à une loi de frottement de Tresca. Le comportement de cette fondation est de type élastique-rigide et peut être interprété physiquement comme suit : la fondation est supposée constituée d'un matériau rigide surmonté d'une couche déformable d'épaisseur  $g$ . Sur la surface de contact décrite dans la Figure 4.2 nous observons les différents statuts de contact avec frottement. Ainsi, dans la partie médiane de la zone de contact  $\Gamma_3$ , nous constatons qu'une proportion non négligeable des noeuds en contact est en statut de contact unilatéral (CU) ; ici, la couche d'aspérités d'épaisseur  $g = 0.5m$  a été complètement écrasée et, par suite,  $u_\nu = g$  ; de plus, la force de frottement, en norme, n'atteint pas le seuil  $\mu(\|\mathbf{u}_\tau\|)p(u_\nu)$  et, de ce fait, ces points sont en statut d'adhérence (CU/S=). Ensuite, les noeuds de contact sur les extrémités de  $\Gamma_3$  sont en statut de compliancance normale (CN) puisque, à cet endroit, la pénétration est telle que  $0 < u_\nu < g$  ; en outre, la norme de la force de frottement atteint le seuil  $\mu(\|\mathbf{u}_\tau\|)p(u_\nu)$  et, par conséquent, ces points sont en statut de glissement avant (CN/S+). Les régions décrites plus haut sont séparées par deux zones dans lesquelles les noeuds sont en statut de compliancance normale avec adhérence (CN/S=) ; ici, ni la valeur critique de pénétration  $g$  ni le seuil de frottement ne sont atteints.

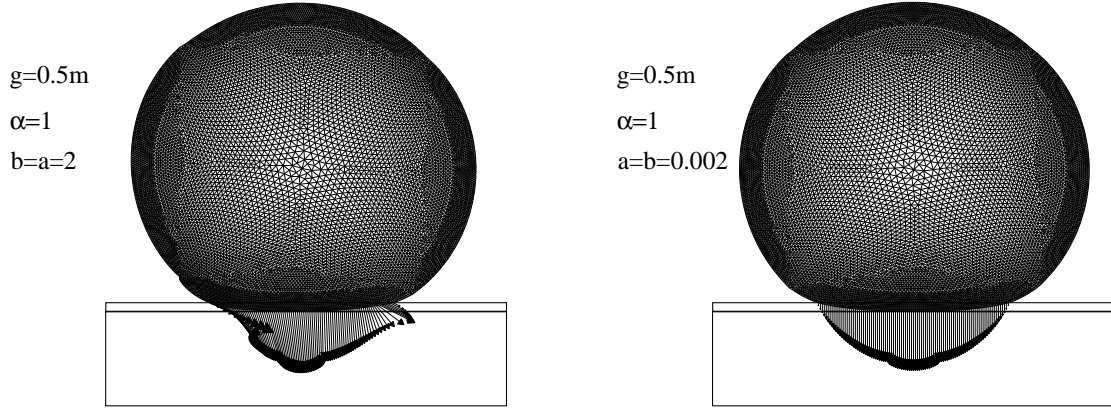


FIGURE 4.3 : Maillages déformés et forces de contact (cas  $a = b$ ).

Dans la Figure 4.3 , nous avons représenté deux maillages déformés et les forces de contact associées correspondant à une loi de frottement monotone. Notons que dans le cas  $a = b = 2$ , le comportement de la solution est pratiquement similaire à celui obtenu dans le cas non-monotone  $a \neq b$ . A l'inverse, le cas  $a = b = 0.002$  présente des différences notables. Cela vient du fait que le coefficient de frottement  $\mu$ , et par conséquent le seuil de frottement  $\mu p(u_\nu)$ , est faible ce qui implique que les noeuds de contact sont tous en statut de glissement.

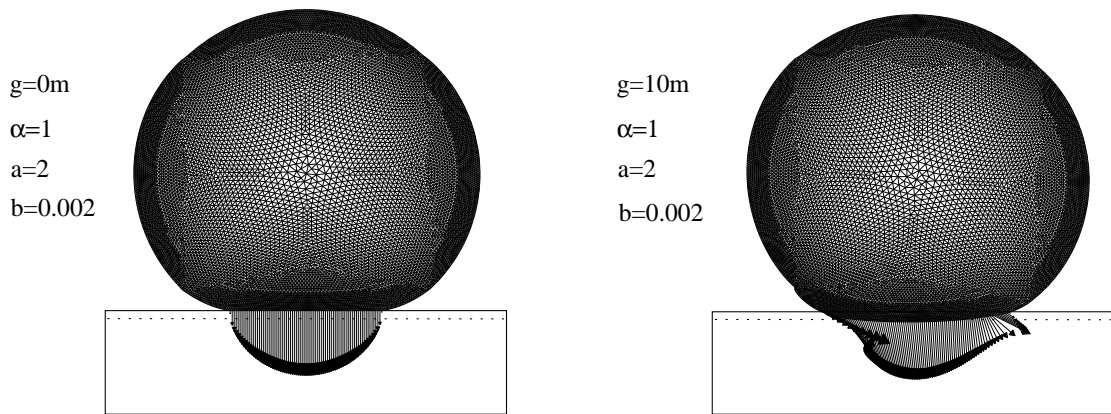


FIGURE 4.4 : Maillages déformés et forces de contact pour  $g = 0m$  et  $g = 10m$ .

Dans la Figure 4.4 , les configurations déformées et les forces de contact asso-



ciées sont représentées pour deux valeurs du paramètre  $g$  qui représente, pour rappel, l'épaisseur de la couche déformable. Notre objectif est ici de montrer que, avec un choix judicieux de ce paramètre, il est possible de faire en sorte que les conditions de contact avec frottement (4.5)–(4.6) se ramènent à des conditions de contact sans frottement. Tout d'abord, le cas  $g = 0m$  correspond à un problème de contact sans frottement avec les conditions de Signorini; ici la valeur du seuil de frottement de Tresca est égale à zéro puisque  $p(0) = 0$  et, de ce fait, tous les noeuds sont en statut de contact unilatéral avec glissement quelle que soit la valeur de  $\mu$  et  $\sigma_\tau = \mathbf{0}$ . Ensuite, le cas  $g = 10m$  correspond à un problème de contact frottant avec une condition de compliance normale associée à une loi de frottement sec de Coulomb; ici la valeur de  $g$  est suffisamment grande; elle n'est donc pas atteinte; la pénétration est donc positive en chaque noeud et fonction linéaire de la composante normale de la force de contact.

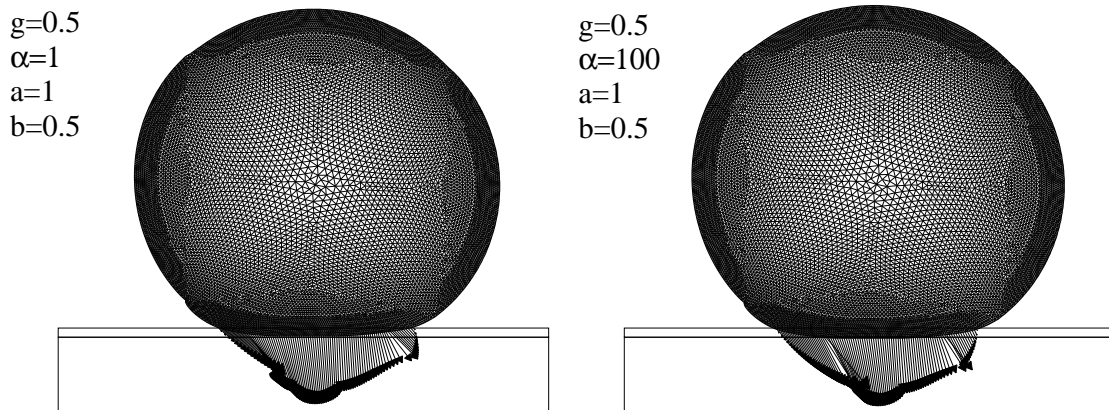


FIGURE 4.5 : Maillages déformés et forces de contact pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 100$ .

Dans la Figure 4.5, on s'intéresse à l'impact de la valeur de  $\alpha$  sur le corps déformé et les forces de contact. Bien que la différence entre les simulations pour les deux valeurs de  $\alpha$  choisies ne soit pas véritablement significative, il convient de noter que l'augmentation de ce paramètre accentue la décroissance du coefficient de frottement, et par là même la non-convexité de la fonction qui régit le-dit coefficient. Un tel phénomène est bien confirmé par l'augmentation conséquente du temps CPU et du nombre d'itérations de convexification en modifiant  $\alpha$  (6 pour  $\alpha = 1$  contre 68 pour  $\alpha = 100$ ).

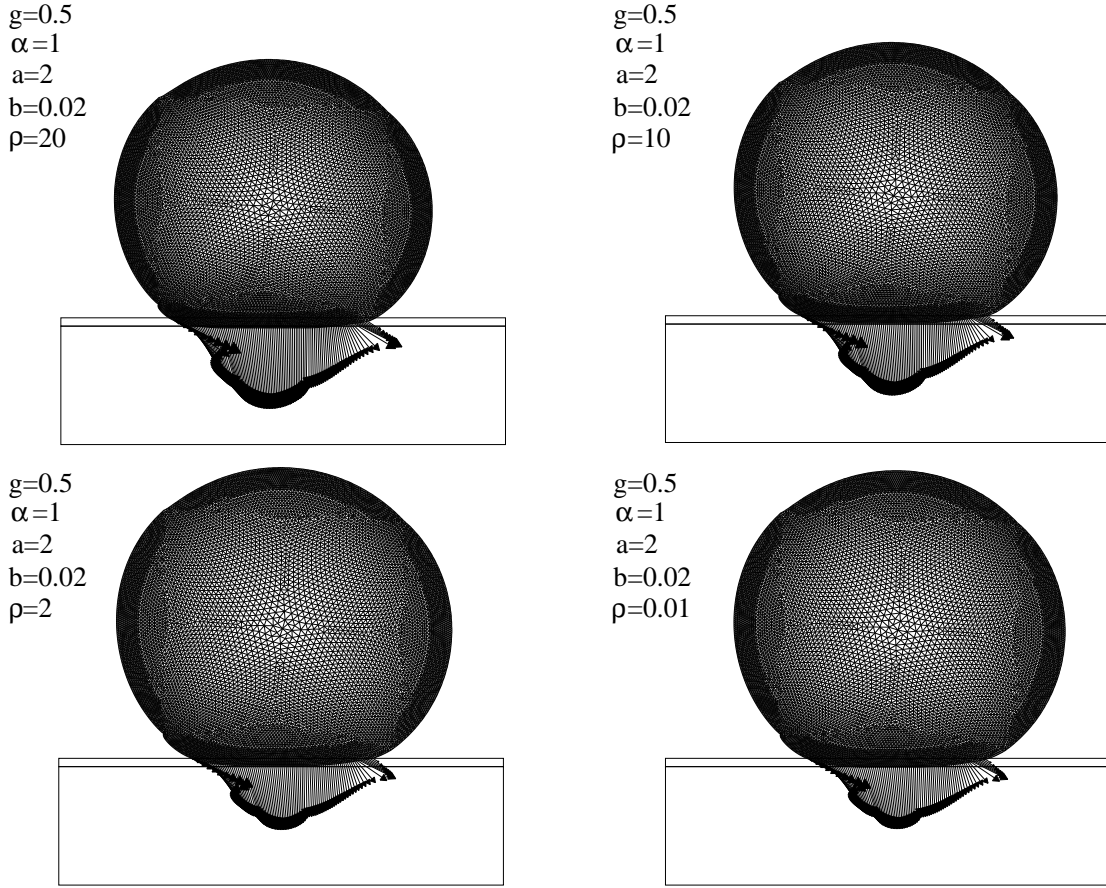


FIGURE 4.6 : Maillages déformés et forces de contact pour  $\rho = 20$ ,  $\rho = 10$ ,  $\rho = 2$  et  $\rho = 10^{-2}$ .

Afin d'illustrer le résultat de convergence de la section 4.4, la Figure 4.6 présente le corps déformé et les forces de contact pour 4 valeurs du paramètre  $\rho$ . Bien que le maillage déformé et les forces de contact apparaissent bien différents de ceux présentés dans la Figure 4.2, cette différence s'amenuise à mesure que  $\rho$  tend vers 0. Pour  $\rho = 10^{-2}$ , le maillage déformé et les forces de contact sont très proches de ceux pour  $\rho = 0$ , confirmant ainsi le résultat de convergence.

**Remarque 4.13.** Par rapport à l'estimation de l'erreur, l'ordre de convergence de la solution du problème perturbé vers la solution du problème d'origine revêt beaucoup moins d'importance ; c'est la raison pour laquelle on se contentera d'une validation

qualitative du résultat de convergence théorique obtenu dans la section 4.4.

**Estimation d'erreur.** Afin de vérifier la convergence du schéma discret et d'illustrer l'estimation d'erreur optimale obtenue dans la Section 4.5, nous avons déterminé une suite de solutions numériques en utilisant une triangularisation uniforme du corps avec un paramètre de discretisation  $h$ . Dans la mesure où une telle procédure est délicate pour une géométrie sphérique, il lui a été préféré un domaine  $\Omega$  de forme carrée, i.e.  $\Omega = (0, L) \times (0, L) \subset \mathbb{R}^2$  avec  $L > 0$  et

$$\Gamma_1 = \{0\} \times [0, L], \quad \Gamma_2 = (\{L\} \times [0, L]) \cup ([0, L] \times \{L\}), \quad \Gamma_3 = [0, L] \times \{0\}.$$

Le domaine  $\Omega$  représente, une fois encore, la coupe transversale d'un corps élastique en trois dimensions soumis à l'action de forces de traction de manière à ce que l'hypothèse des déformations planes soit valide. Les approximations de l'estimation de l'erreur numérique  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V$  sont établies pour plusieurs valeurs du paramètre de discrétisation spatiale  $h$ . Ici, la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est divisée en  $1/h$  parties égales. Nous commençons le calcul avec  $h = 1/2$  puis procédons par des divisions successives par deux du pas. La solution numérique correspondant à  $h = 1/256$  est considérée comme étant la solution "exacte", et sert de référence pour définir les erreurs de la solution numérique pour des valeurs de  $h$  plus élevées. Les résultats numériques sont présentés dans la Figure 4.7 dans laquelle la relation entre l'estimation de l'erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V$  et  $h$  est tracée. Pour finir, notons que ces résultats valident l'estimation théorique de l'erreur obtenue dans la Section 4.5 qui se traduit par un comportement linéairement asymptotique de l'erreur.

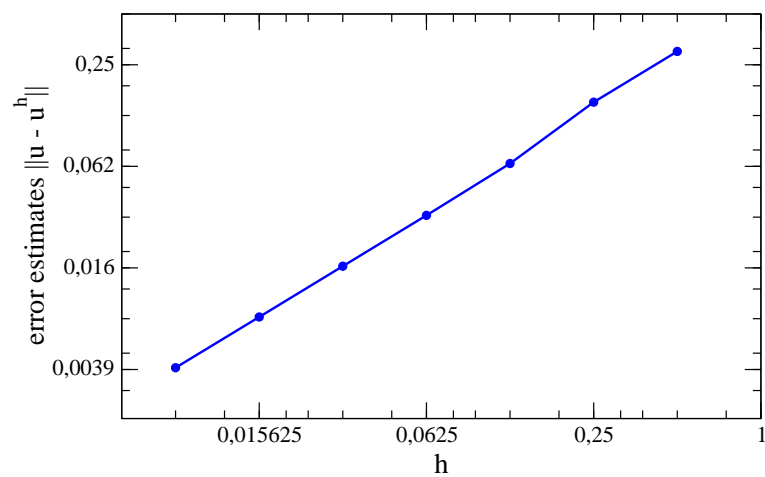


FIGURE 4.7 : Estimation de l'erreur numérique.



## Chapitre 5

# Problème viscoélastique de contact avec contraintes unilatérales et réponse normale instantanée

Dans ce Chapitre, nous considérons un problème quasistatique modélisant le contact entre un corps viscoélastique avec mémoire et un obstacle faisant figure de fondation. Dans le Chapitre 4, le contact était décrit à l'aide d'une loi de compliance normale couplée à des conditions de Signorini en déplacement ; cette fois nous nous intéressons au même type de loi mais formulée en vitesse. Quant au frottement il s'agit ici d'une loi de Coulomb monotone, formulée une nouvelle fois en vitesse. Dans la première section de ce Chapitre, nous présentons la formulation forte du problème et les hypothèses nécessaire à l'obtention d'une formulation variationnelle. Dans la section 2, nous abordons la question de l'existence et de l'unicité de la solution faible du problème. Dans la section 3, nous étudions un résultat de convergence. Plus précisément, nous établissons que la solution du problème d'origine dans lequel est introduite une perturbation de certaines données converge vers la solution du problème non perturbé lorsque la perturbation tend vers 0. Dans la section 4, nous proposons une estimation théorique optimale de l'erreur de discrétisation. Enfin, la section 5 est consacrée aux simulations numériques permettant ainsi d'étudier le comportement de la solution et de donner une validation numérique du résultat de convergence et de l'estimation théorique de l'erreur de discrétisation. Ce Chapitre a fait l'objet de l'article [26].

## 5.1 Modèle

Le problème étudié se formule de la manière suivante :

**Problème  $\mathcal{P}$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$  tels que*

$$(5.1) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{K}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s))ds \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(5.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(5.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(5.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(5.5) \quad \left. \begin{array}{l} \dot{u}_\nu(t) \leq g, \quad \sigma_\nu(t) + p(\dot{u}_\nu(t)) \leq 0, \\ (\dot{u}_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + p(\dot{u}_\nu(t))) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(5.6) \quad \left. \begin{array}{l} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\| \leq \mu p(\dot{u}_\nu(t)), \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mu p(\dot{u}_\nu(t)) \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)\|} \text{ si } \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) \neq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et, de plus,

$$(5.7) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

L'équation (5.1) représente la loi constitutive viscoélastique du matériau, précédemment introduite dans la sous-section 1.2.3. L'équation (5.2) est l'équation d'équilibre exprimée ici dans le cas d'un processus quasistatique. Les conditions (5.3) et (5.4) désignent respectivement les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Les relations (5.5) et (5.6) caractérisent les conditions de contact avec frottement, à savoir une réponse normale instantanée couplée aux conditions de contraintes unilatérales en vitesse et une loi de frottement de Coulomb déjà décrites dans (1.28) et (1.36) respectivement. Enfin, (5.7) est la condition initiale dans laquelle  $\mathbf{u}_0$  désigne le déplacement initial.

Afin d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel associé au problème mécanique (5.1)–(5.7) nous supposons que les opérateurs de viscosité et

d'élasticité ainsi que le tenseur de relaxation satisfont les conditions suivantes.

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour n'importe quel } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour n'importe quel } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

$$(5.10) \quad \mathcal{K} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbf{Q}_{\infty}).$$

Nous supposons également que les grandeurs  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_2$  sont dotées de la régularité suivante

$$(5.11) \quad \mathbf{f}_0 \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Gamma_2)^d).$$

La fonction  $g$  est telle que

$$(5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } g : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } G > 0 \text{ tel que } g(\mathbf{x}) \leq G \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}) \text{ est continue sur } \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Enfin, la fonction de réponse normale instantanée, le coefficient de frottement et le déplacement initial satisfont

$$(5.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \text{pour n'importe quel } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(e) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$



$$(5.14) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

$$(5.15) \quad \mathbf{u}_0 \in V.$$

Nous nous occupons maintenant de la formulation variationnelle du Problème  $\mathcal{P}$ . Nous introduisons pour cela un ensemble de vitesses admissibles  $U$  ainsi que les fonctions  $j : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$  définies par

$$(5.16) \quad U = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3 \},$$

$$(5.17) \quad j(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p(w_\nu) \|\mathbf{v}_\tau\| da \quad \forall \mathbf{w} \in U, \mathbf{v} \in V,$$

$$(5.18) \quad (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in \mathbb{R}.$$

Supposons que  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  sont des fonctions suffisamment régulières satisfaisant (5.1)–(5.7) et soient  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $\mathbf{v} \in U$ . Nous effectuons une intégration par partie et utilisons la définition (5.18) afin d'obtenir :

$$(5.19) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \\ + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau) da.$$

Maintenant, nous utilisons les conditions (5.5), (5.6) et la définition (5.16) pour obtenir

$$(5.20) \quad \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da \geq - \int_{\Gamma_3} p(\dot{u}_\nu(t))(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da,$$

$$(5.21) \quad \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)) da \\ \geq \int_{\Gamma_3} \mu p(\dot{u}_\nu(t)) \|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)\| da - \int_{\Gamma_3} \mu p(\dot{u}_\nu(t)) \|\mathbf{v}_\tau\| da.$$

Ensuite, nous combinons (5.19)–(5.21) ainsi que la définition (5.17) pour déduire que

$$(5.22) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + (p(\dot{u}_\nu(t)), v_\nu - \dot{u}_\nu(t))_{L^2(\Gamma_3)} \\ + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

D'autre part, (5.3), (5.5), (5.15) et (5.16) montre que

$$(5.23) \quad \dot{\mathbf{u}}(t) \in U, \quad \mathbf{u}(t) \in V.$$

Enfin, nous combinons l'égalité (5.22) avec la loi constitutive (5.1), la régularité (5.23) et la condition initiale (5.7) pour obtenir la formulation variationnelle suivante pour le Problème  $\mathcal{P}$ .

**Problème  $\mathcal{P}_V$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$  tel que  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :*

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) \in U, \quad & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + (\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q \\ & + \left( \int_0^t \mathcal{K}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) \right)_Q + (p(\dot{u}_\nu(t)), v_\nu - \dot{u}_\nu(t))_{L^2(\Gamma_3)} \\ & + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U. \end{aligned}$$

Notons que le Problème  $\mathcal{P}_V$  est formulé en terme de champ de déplacements. Une fois que le champ de déplacements est connu, le champ de contraintes peut être facilement déduit en utilisant la loi constitutive (5.1). Un couple  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  qui satisfait (5.1) et (5.24) est appelé *solution faible* du problème de contact avec frottement  $\mathcal{P}$ .

## 5.2 Existence et unicité

L'unicité de la solution du Problème  $\mathcal{P}_V$  provient du résultat suivant.

**Théorème 5.1.** *Supposons que les conditions (5.8)–(5.15) sont remplies et, de plus, supposons que*

$$(5.25) \quad c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < m_{\mathcal{A}}.$$

*Alors le Problème  $\mathcal{P}_V$  a une unique solution, qui satisfait  $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$ .*

La démonstration se fera en plusieurs étapes. Tout d'abord, il nous faut supposer que (5.8)–(5.14) sont valides dans ce qui suit puis nous considérons les opérateurs  $A : V \rightarrow V$ ,  $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; V)$  (déjà introduits auparavant dans (2.12)) et

$\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; V)$ , en partie analogue à (2.14), définis par

$$(5.26) \quad (A\mathbf{w}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Gamma_3} p(w_\nu) v_\nu \, da \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(5.27) \quad \mathcal{S}\mathbf{w}(t) = \int_0^t \mathbf{w}(s) \, ds + \mathbf{u}_0 \quad \forall \mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+; V), \, t \in \mathbb{R}_+,$$

$$(5.28) \quad (\mathcal{R}\mathbf{w}(t), \mathbf{v})_V = \left( \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{S}\mathbf{w}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_Q + \left( \int_0^t \mathcal{K}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_Q \\ \forall \mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+; V), \, \mathbf{v} \in V, \, t \in \mathbb{R}_+.$$

Notons que l'opérateur  $\mathcal{S}$  satisfait l'inégalité

$$(5.29) \quad \|\mathcal{S}\mathbf{w}_1(t) - \mathcal{S}\mathbf{w}_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_V \, ds \\ \forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in C(\mathbb{R}_+; V), \, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Avec les préliminaires, nous considérons le problème auxiliaire formulé en vitesses et défini de la manière suivante.

**Problème  $\mathcal{Q}_V$ .** *Trouver un champ de vitesses  $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+; U)$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :*

$$(5.30) \quad (A\mathbf{w}(t), \mathbf{v} - \mathbf{w}(t))_V + (\mathcal{R}\mathbf{w}(t), \mathbf{v} - \mathbf{w}(t))_V \\ + j(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{w}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Nous avons le résultat d'équivalence suivant.

**Lemme 5.2.** *Soient  $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$  et  $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+; U)$ , deux fonctions données telles que  $\mathbf{u} = \mathcal{S}\mathbf{w}$ . Alors  $\mathbf{u}$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}_V$  si et seulement si  $\mathbf{w}$  est une solution du Problème  $\mathcal{Q}_V$ .*

**Démonstration.** Supposons que  $\mathbf{u}$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}_V$ . Alors, l'égalité  $\mathbf{u} = \mathcal{S}\mathbf{w}$  et la définition (5.27) de l'opérateur  $\mathcal{S}$  impliquent que  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{w}$ . Par suite, en utilisant (5.24) et les définitions (5.26) et (5.28) des opérateurs  $A$  et  $\mathcal{R}$ , respectivement, nous déduisons que la fonction  $\mathbf{w}$  est une solution du Problème  $\mathcal{Q}_V$ .

Réciproquement, supposons que  $\mathbf{w}$  est une solution du Problème  $\mathcal{Q}_V$ . Alors, l'égalité  $\mathbf{u} = \mathcal{S}\mathbf{w}$  et la définition (5.27) de l'opérateur  $\mathcal{S}$  impliquent que  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{w}$  et  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ . De plus, en utilisant (5.30) et les notations (5.27) et (5.28) nous en déduisons que

(5.24) est valide. Nous en concluons que la fonction  $\mathbf{u}$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}_V$ .  $\square$

Nous passons maintenant à la question de l'existence et de l'unicité de la solution du Problème  $\mathcal{Q}_V$ .

**Lemme 5.3.** *Le Problème  $\mathcal{Q}_V$  a une unique solution, qui satisfait  $\mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+; U)$ .*

**Démonstration.** Nous utilisons le Théorème 2.17 avec  $X = V$  et  $K = U$ . Notons que, de façon évidente, la condition (2.18) est satisfaite. Ensuite, nous avons recours à la définition (5.26) ainsi qu'aux propriétés (5.8)(c) et (5.13)(d) pour voir que

$$(5.31) \quad (A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

D'autre part, en utilisant (5.8)(b), (5.13)(b), (5.26) et l'inégalité de la trace (2.4), nous avons

$$(5.32) \quad \|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_V \leq (L_{\mathcal{A}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

De là, nous en déduisons que  $A$  est un opérateur continu Lipschitzien fortement monotone sur l'espace  $V$ , i.e. qui satisfait la condition (2.19).

A présent, soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in [0, n]$  et considérons  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C([0, n]; V)$ . Nous utilisons la définition (5.28) pour trouver que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}\mathbf{u}(t) - \mathcal{R}\mathbf{v}(t)\|_V &\leq \|\mathcal{B}\varepsilon(\mathcal{S}(\mathbf{u}(t))) - \mathcal{B}\varepsilon(\mathcal{S}(\mathbf{v}(t)))\| \\ &\quad + \left\| \int_0^t \mathcal{K}(t-s) \varepsilon(\mathbf{u}(s)) ds - \int_0^t \mathcal{K}(t-s) \varepsilon(\mathbf{v}(s)) ds \right\| \end{aligned}$$

et, par conséquent, les hypothèses (5.9) et les inégalités (5.29), (2.3) nous donnent

$$(5.33) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{R}\mathbf{u}(t) - \mathcal{R}\mathbf{v}(t)\|_V &\leq \left( L_{\mathcal{B}} + \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{K}(r)\|_{\mathbf{Q}_{\infty}} \right) \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

L'inégalité (5.33) montre que (2.20) est vérifiée avec  $r_n = L_{\mathcal{B}} + \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{K}(r)\|_{\mathbf{Q}_{\infty}}$ .

En outre, il est facile de voir que la fonctionnelle  $j$  définie par (5.17) satisfait la condition (2.21)(a). Soient  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , 4 éléments arbitraires de  $U$ . Nous utilisons la définition (5.17) pour voir que

$$\begin{aligned} j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\ = \int_{\Gamma_3} \mu (p(u_{1\nu}) - p(u_{2\nu})) (\|\mathbf{v}_{2\tau}\| - \|\mathbf{v}_{1\tau}\|) da. \end{aligned}$$

Ensuite, nous avons recours aux inégalités

$$|\mathbf{u}_{1\nu} - \mathbf{u}_{2\nu}| \leq \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|, \quad \left| \|\mathbf{v}_{1\tau}\| - \|\mathbf{v}_{2\tau}\| \right| \leq \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

pour déduire, à l'aide de l'hypothèse (5.13)(b) et de l'inégalité de la trace (2.4), que

$$\begin{aligned} (5.34) \quad & j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\ & \leq c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que la condition (2.21) est vérifiée avec  $\alpha = c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$ .

De là, en utilisant l'hypothèse (5.11) et la définition (5.18), nous en déduisons que  $\mathbf{f}$  a la régularité requise pour que (2.22) soit également vérifiée. Enfin, nous notons que la condition de petitesse (5.25) correspond à la condition  $m > \alpha$  dans la mesure où (5.31) et (5.34) signifient que  $m = m_{\mathcal{A}}$  et  $\alpha = c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$ , respectivement. Le Lemme 5.2 n'est maintenant plus qu'une conséquence du Théorème 2.17.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 5.1.

**Démonstration.** Soit  $\mathbf{w}$ , la solution du Problème  $\mathcal{Q}_V$  obtenue au Lemme 5.3 et soit  $\mathbf{u} = \mathcal{S}\mathbf{w}$ . Alors  $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$  et le Lemme 5.2 montre que  $\mathbf{u}$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}_V$ . Cela prouve l'existence d'une solution.

Considérons maintenant  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$ , deux solutions du Problème  $\mathcal{P}_V$  telles que  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$ . Alors  $\mathbf{u}_i(0) = \mathbf{u}_0$  pour  $i = 1, 2$  ce qui implique que  $\mathbf{u}_i = \mathcal{S}\mathbf{w}_i$  où  $\mathbf{w}_i = \dot{\mathbf{u}}_i$ , pour  $i = 1, 2$ . De plus, le Lemme 5.2 implique que  $\mathbf{w}_i$  représente une solution du Problème  $\mathcal{Q}_V$  et en utilisant l'unicité de la solution de ce problème, qui est garantie par le Lemme 5.3, nous en déduisons que  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ . Par suite,  $\mathbf{u}_1 = \mathcal{S}\mathbf{w}_1 = \mathcal{S}\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2$ , ce qui prouve l'unicité de la solution et conclut cette démonstration.  $\square$

Le Théorème 5.1 permet de conclure que, sous les hypothèses (5.8)–(5.15) et (5.25), le Problème  $\mathcal{P}$  admet une unique solution faible.

### 5.3 Un résultat de convergence

Nous nous intéressons maintenant au comportement de la solution du Problème  $\mathcal{P}_V$  lorsque l'on introduit une perturbation dans certaines données. Là encore, de nombreux cas pourraient être considérés mais, par souci de simplicité, nous nous limiterons à démontrer que la solution dépend continûment du tenseur de relaxation  $\mathcal{K}$ , du coefficient de frottement  $\mu$ , ainsi que des densités de force volumique et de traction surfacique  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_2$ , respectivement. Ainsi, nous supposons dans ce qui suit que (5.8)–(5.15) et

(5.25) sont vérifiées et désignons par  $\mathbf{u}$  la solution de Problème  $\mathcal{P}_V$  obtenue dans le Théorème 5.1. Pour chaque  $\rho > 0$  soient  $\mathcal{K}_\rho, \mu_\rho, \mathbf{f}_{0\rho}, \mathbf{f}_{2\rho}$ , les perturbations de  $\mathcal{K}, \mu, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2$  satisfaisant les conditions (5.10), (5.14) et (5.11), respectivement. Nous considérons alors le Problème variationnel perturbé de  $\mathcal{P}_V$  suivant.

**Problème  $\mathcal{P}_V^\rho$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u}_\rho \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$  tel que  $\mathbf{u}_\rho(0) = \mathbf{u}_0$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :*

$$(5.35) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_\rho(t) \in U, \quad & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)))_Q + (\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}_\rho(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)))_Q \\ & + \left( \int_0^t \mathcal{K}_\rho(t-s) \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) \right)_Q + (p(\dot{u}_{\rho\nu}(t)), v_\nu - \dot{u}_{\rho\nu}(t))_{L^2(\Gamma_3)} \\ & + j_\rho(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t), \mathbf{v}) - j_\rho(\dot{\mathbf{u}}_\rho(t), \dot{\mathbf{u}}_\rho(t)) \geq (\mathbf{f}_\rho(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\rho(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U. \end{aligned}$$

Dans le reste de cette section, les fonctions  $j_\rho$  et  $\mathbf{f}_\rho$  sont définies par les égalités (5.17) et (5.18) dans lesquelles  $\mu, \mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_2$  sont remplacés par  $\mu_\rho, \mathbf{f}_{0\rho}$  et  $\mathbf{f}_{2\rho}$ , respectivement, i.e.

$$(5.36) \quad j_\rho(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu_\rho p(w_\nu(t)) \|\mathbf{v}_\tau\| da \quad \forall \mathbf{w} \in U, \mathbf{v} \in V,$$

$$(5.37) \quad (\mathbf{f}_\rho(t), \mathbf{v})_V = \int_\Omega \mathbf{f}_{0\rho}(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2\rho}(t) \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in V.$$

Supposons maintenant qu'il existe  $L_0 \geq 0$  tel que

$$(5.38) \quad c_0^2 L_p \|\mu_\rho\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq L_0 < m_{\mathcal{A}}, \quad \text{pour chaque } \rho > 0.$$

Alors, il découle du Théorème 5.1 que, pour chaque  $\rho > 0$ , le Problème  $\mathcal{P}_V^\rho$  admet une unique solution  $\mathbf{u}_\rho$  telle que  $\mathbf{u}_\rho \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$ . Considérons maintenant les hypothèses suivantes :

$$(5.39) \quad \mathcal{K}_\rho \rightarrow \mathcal{K} \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; \mathbf{Q}_\infty) \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

$$(5.40) \quad \mu_\rho \rightarrow \mu \quad \text{dans } L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

$$(5.41) \quad \mathbf{f}_{0\rho} \rightarrow \mathbf{f}_0 \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d) \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

$$(5.42) \quad \mathbf{f}_{2\rho} \rightarrow \mathbf{f}_2 \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d) \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Nous avons le Théorème de convergence suivant, qui constitue le résultat principal de cette section.

**Théorème 5.4.** *Supposons que (5.39)–(5.42) soient vérifiées. Alors la solution  $\mathbf{u}_\rho$  du Problème  $\mathcal{P}_V^\rho$  converge vers la solution  $\mathbf{u}$  du Problème  $\mathcal{P}^V$ , i.e.*

$$(5.43) \quad \mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans} \quad C^1(\mathbb{R}_+; V) \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

**Démonstration.** Soit  $\rho > 0$  et désignons par  $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{u}}$  et  $\mathbf{w}_\rho = \dot{\mathbf{u}}_\rho$  les champs de vitesses. Alors, il résulte de la démonstration du Lemme 5.2 que, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , l'inégalité (5.30) est vérifiée et, de plus,

$$(5.44) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_\rho(t) \in U, \quad (A\mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{v} - \mathbf{w}_\rho(t))_V + (\mathcal{R}_\rho \mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{v} - \mathbf{w}_\rho(t))_V \\ + j_\rho(\mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{v}) - j_\rho(\mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{w}_\rho(t)) \geq (\mathbf{f}_\rho, \mathbf{v} - \mathbf{w}_\rho(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous utilisons la notation suivante

$$(5.45) \quad (\mathcal{R}_\rho \mathbf{w}(t), \mathbf{v})_V = \left( \mathcal{B}\varepsilon(\mathcal{I}\mathbf{w}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) \right)_Q + \left( \int_0^t \mathcal{K}_\rho(t-s) \varepsilon(\mathbf{w}) ds, \varepsilon(\mathbf{v}) \right)_Q \\ \forall \mathbf{w} \in C(\mathbb{R}_+; V), \quad \mathbf{v} \in V, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Supposons maintenant que  $\rho > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in [0, n]$ . Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{w}(t)$  dans (5.44),  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_\rho(t)$  dans (5.30), ensuite nous ajoutons membre à membre les inégalités pour obtenir que

$$(5.46) \quad \begin{aligned} (A\mathbf{w}_\rho(t) - A\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t))_V \\ \leq (\mathcal{R}_\rho \mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}_\rho(t))_V + (\mathcal{R}\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t))_V \\ + j(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_\rho(t)) - j(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t)) + j_\rho(\mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{w}(t)) - j_\rho(\mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{w}_\rho(t)) \\ + (\mathbf{f}_\rho(t) - \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t))_V. \end{aligned}$$

Nous cherchons à présent à évaluer les termes de l'inégalité précédente. Tout d'abord, nous utilisons l'hypothèse (5.8) pour déduire que

$$(5.47) \quad (A\mathbf{w}_\rho(t) - A\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t))_V \geq m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t)\|_V^2.$$

Ensuite, en utilisant les définitions (5.28) et (5.45), nous obtenons après calcul que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{R}_\rho \mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}_\rho(t))_V + (\mathcal{R}\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t))_V \\ &= \left( \int_0^t [\mathcal{K}_\rho(t-s) \varepsilon(\mathbf{w}_\rho(s)) - \mathcal{K}(t-s) \varepsilon(\mathbf{w}(s))] ds, \varepsilon(\mathbf{w}(t) - \varepsilon(\mathbf{w}_\rho(t))) \right)_Q \\ &\leq \left( \int_0^t \|\mathcal{K}_\rho(t-s) \varepsilon(\mathbf{w}_\rho(s)) - \mathcal{K}(t-s) \varepsilon(\mathbf{w}(s))\| ds \right) \|\mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t)\|_V. \end{aligned}$$

Nous écrivons maintenant

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{K}_\rho(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_\rho(s)) - \mathcal{K}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(s)) \| \\ & \leq \| \mathcal{K}_\rho(t-s)(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_\rho(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(s))) \| \\ & \quad + \| (\mathcal{K}_\rho(t-s) - \mathcal{K}(t-s))\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(s)) \|. \end{aligned}$$

Puis nous utilisons l'inégalité (2.3) deux fois, pour déterminer que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{R}_\rho \mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}_\rho(t))_V + (\mathcal{R} \mathbf{w}(t), \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t))_V \\ & \leq \max_{r \in [0, n]} \| \mathcal{K}_\rho(r) \|_{\mathbf{Q}_\infty} \left( \int_0^t \| \mathbf{w}_\rho(s) - \mathbf{w}(s) \|_V ds \right) \| \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t) \|_V \\ & \quad + \max_{r \in [0, n]} \| \mathcal{K}_\rho(r) - \mathcal{K}(r) \|_{\mathbf{Q}_\infty} \left( \int_0^t \| \mathbf{w}(s) \|_V ds \right) \| \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t) \|_V. \end{aligned}$$

De plus, d'après (5.17) et (5.36), nous avons

$$\begin{aligned} & j(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_\rho(t)) - j(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t)) + j_\rho(\mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{w}(t)) - j_\rho(\mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{w}_\rho(t)) \\ & = \int_{\Gamma_3} (\mu p(w_\nu(t)) - \mu_\rho p(w_{\rho\nu}(t))) (\| \mathbf{w}_{\rho\tau}(t) \| - \| \mathbf{w}_\tau(t) \|) da. \end{aligned}$$

Par conséquent, en écrivant

$$\begin{aligned} & \mu_\rho p(w_{\rho\nu}(t)) - \mu p(w_\nu(t)) \\ & = \mu_\rho (p(w_{\rho\nu}(t)) - p(w_\nu(t))) + (\mu_\rho - \mu) p(w_\nu(t)) \end{aligned}$$

puis, en utilisant (2.4) et (5.13), nous trouvons après quelques calculs que

$$\begin{aligned} (5.48) \quad & j(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_\rho(t)) - j(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t)) + j_\rho(\mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{w}(t)) - j_\rho(\mathbf{w}_\rho(t), \mathbf{w}_\rho(t)) \\ & \leq c_0^2 L_p \| \mu_\rho \|_{L^\infty(\Gamma_3)} \| \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t) \|_V^2 \\ & \quad + c_0^2 L_p \| \mu_\rho - \mu \|_{L^\infty(\Gamma_3)} \| \mathbf{w}(t) \|_V \| \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t) \|_V. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous obtenons que

$$(5.49) \quad (\mathbf{f}_\rho(t) - \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t))_V \leq \| \mathbf{f}_\rho(t) - \mathbf{f}(t) \|_V \| \mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t) \|_V.$$



Soient

$$(5.50) \quad \gamma_{\rho n} = \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{K}_\rho(r)\|_{Q_\infty}.$$

$$(5.51) \quad \eta_{\rho n} = \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{K}_\rho(r) - \mathcal{K}(r)\|_{Q_\infty} \left( \int_0^n \|\mathbf{w}(s)\|_V ds \right).$$

$$(5.52) \quad \phi_{\rho n} = c_0^2 L_p \|\mu_\rho - \mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \max_{s \in [0, n]} \|\mathbf{w}(s)\|_V.$$

$$(5.53) \quad \delta_{\rho n} = \max_{r \in [0, n]} \|\mathbf{f}_\rho(r) - \mathbf{f}(r)\|_V.$$

Ensuite, en combinant les inégalités (5.46)–(5.49) et avec les notations (5.50)–(5.53) nous déduisons que

$$\begin{aligned} & (m_{\mathcal{A}} - c_0^2 L_p \|\mu_\rho\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t)\|_V \\ & \leq \eta_{\rho n} + \phi_{\rho n} + \delta_{\rho n} + \gamma_{\rho n} \left( \int_0^t \|\mathbf{w}_\rho(s) - \mathbf{w}(s)\|_V ds \right). \end{aligned}$$

De là, en utilisant les hypothèses (5.38) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & (m_{\mathcal{A}} - L_0) \|\mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t)\|_V \\ & \leq \eta_{\rho n} + \phi_{\rho n} + \delta_{\rho n} + \gamma_{\rho n} \left( \int_0^t \|\mathbf{w}_\rho(s) - \mathbf{w}(s)\|_V ds \right). \end{aligned}$$

Nous utilisons le Lemme de Grönwall (cf Lemme 2.18) dans la dernière inégalité pour voir que :

$$\|\mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t)\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}} - L_0} (\eta_{\rho n} + \phi_{\rho n} + \delta_{\rho n}) e^{\frac{\gamma_{\rho n}}{m_{\mathcal{A}} - L_0} t}$$

et, de ce fait,

$$(5.54) \quad \max_{t \in [0, n]} \|\mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t)\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}} - L_0} (\eta_{\rho n} + \phi_{\rho n} + \delta_{\rho n}) e^{\frac{n\gamma_{\rho n}}{m_{\mathcal{A}} - L_0}}.$$

Maintenant, nous utilisons les hypothèses (5.39)–(5.42) ainsi que le critère de convergence (2.2) pour voir que

$$(5.55) \quad \eta_{\rho n} \rightarrow 0, \quad \phi_{\rho n} \rightarrow 0, \quad \delta_{\rho n} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0$$

et, de plus, il existe  $\gamma_n^* > 0$  tel que

$$(5.56) \quad \gamma_{\rho n} \leq \gamma_n^* \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Par conséquent, avec (5.54)–(5.56)

$$(5.57) \quad \max_{t \in [0, n]} \|\mathbf{w}_\rho(t) - \mathbf{w}(t)\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Ensuite, notons que  $\mathbf{u}_\rho = \mathcal{S}\mathbf{w}_\rho$ ,  $\mathbf{u}(t) = \mathcal{S}\mathbf{w}(t)$  où  $\mathcal{S}$  est l'opérateur donné par (5.27). Par conséquent, en utilisant (5.29) nous en déduisons que

$$(5.58) \quad \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq \int_0^t \|\mathbf{w}_\rho(s) - \mathbf{w}(s)\|_V ds \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

et, en utilisant (5.57), il vient que

$$(5.59) \quad \max_{t \in [0, n]} \|\mathbf{u}_\rho(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Pour rappel  $\dot{\mathbf{u}}_\rho = \mathbf{w}_\rho$  et  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{w}$ . De ce fait, en utilisant (2.2) il est facile de voir que la convergence (5.43) est simplement la conséquence de (5.57) et (5.59).  $\square$

## 5.4 Approximation numérique

Cette section est dédiée à la discrétisation et à l'analyse numérique du Problème  $\mathcal{P}_V$ . Dans tout ce qui suit, les hypothèses (5.8)–(5.14) et (5.25) sont vérifiées et par conséquent, d'après le Théorème 5.1, le Problème  $\mathcal{P}_V$  admet une unique solution. Nous utilisons le même formalisme que dans le Chapitre précédent pour la discrétisation spatiale ; nous considérons un domaine polyédrique  $\Omega$  et choisissons une famille d'éléments finis réguliers constituant une partition de  $\overline{\Omega}$ . Soit  $V^h \subset V$ , un espace de fonctions linéaires continues par morceaux qui s'annulent en  $\Gamma_1$ . Ici,  $h > 0$  désigne le paramètre de discrétisation spatiale. Soit  $U^h \subset V^h$ , une partie non vide, convexe, et fermée approchant  $U$ . Nous prendrons le cas  $U^h \subset U$ . Cette hypothèse est plutôt facile à satisfaire si  $g$  est linéaire par morceaux sur  $\Gamma_3$ . En effet, la condition  $v_\nu^h \leq g$  sur la frontière  $\Gamma_3$  est satisfaite aux noeuds, i.e.,  $v_\nu^h \leq g^I$ , avec  $g^I$ , l'interpolation linéaire de la fonction  $g$ . Par ailleurs, nous nous intéressons à la résolution du Problème  $\mathcal{P}_V$  sur un intervalle de temps fini  $[0, T]$ , avec  $T > 0$  arbitraire mais fixé. Ainsi, soit  $N$ , un entier positif, nous définissons la taille du pas de temps  $k = \frac{T}{N}$  et considérons la discrétisation temporelle uniforme suivante ;

$$t_n = nk, \quad 0 \leq n \leq N.$$

A partir de maintenant, afin d'alléger quelque peu les notations, nous utilisons les symboles  $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}(t_n)$ ,  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_n)$ . Pour une suite  $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N$ ,  $\delta_n \mathbf{u}_n^{hk} = (\mathbf{u}_n^{hk} -$

$\mathbf{u}_{n-1}^{hk})/k$ ,  $n = 1, \dots, N$  est utilisé pour la discrétisation de la vitesse  $\dot{\mathbf{u}}(t_n)$  à l'instant  $t_n$  (différences divisées arrière). Dans cette section, nous utiliserons la notation additionnelle  $\delta \mathbf{u}^{hk} = \{\delta_n \mathbf{u}^{hk}\}_{n=1}^N$ . Pour la discrétisation du terme intégral dans l'équation (5.1), nous avons recours à la méthode des trapèzes :

$$(5.60) \quad \int_0^{t_n} z(s) ds \approx k \sum_{j=0}^{n'} z(t_j),$$

où le prime indique que le premier et le dernier terme de la somme sont divisés par deux. Nous introduisons ensuite l'approximation de l'opérateur  $\mathcal{K}$

$$(5.61) \quad C_n^{hk} \mathbf{w} = k \sum_{j=0}^{n'} \mathcal{K}(t_n - t_j) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_j), \quad 1 \leq n \leq N$$

pour  $\mathbf{w} = \{\mathbf{w}_n\}_{n=0}^N$ . Pour  $n = 0$ , nous définissons  $C_n^{hk} \mathbf{w} = 0$ . Par ailleurs,  $c$  désignera une constante positive ne dépendant ni de  $h$  ni de  $k$  et dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Alors l'approximation variationnelle en temps et en espace du Problème  $\mathcal{P}_V$  est la suivante.

**Problème  $\mathcal{P}_V^{hk}$ .** Trouver un champ de déplacements discrets  $\{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \in V^h$  tel que

$$(5.62) \quad \mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_0^h$$

et pour  $n=1, \dots, N$ ,

$$(5.63) \quad \begin{aligned} & \delta_n \mathbf{u}_n^{hk} \in U^h \\ & (\mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta_n \mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}(\delta_n \mathbf{u}_n^{hk}))_Q + (\mathcal{B} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}(\delta_n \mathbf{u}_n^{hk}))_Q \\ & + (C_n^{hk} \delta_n \mathbf{u}_n^{hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) - \boldsymbol{\varepsilon}(\delta_n \mathbf{u}_n^{hk}))_Q + (p(\delta_n \mathbf{u}_{n\nu}^{hk}), v_\nu^h - \delta_n \mathbf{u}_{n\nu}^{hk})_{L^2(\Gamma_3)} \\ & + j(\delta_n \mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) - j(\delta_n \mathbf{u}_n^{hk}, \delta_n \mathbf{u}_n^{hk}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \delta_n \mathbf{u}_n^{hk})_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in U^h. \end{aligned}$$

Pour simplifier encore d'avantage les notations, nous introduisons la vitesse sous une forme discrétisée

$$(5.64) \quad \mathbf{w}^{hk} = \{\mathbf{w}_n^{hk}\}_{n=1}^N, \mathbf{w}_n^{hk} = \delta_n \mathbf{u}_n^{hk}, n = 1, \dots, N.$$

Alors nous pouvons réécrire (5.63) de la manière suivante

$$(5.65) \quad (A\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk})_V + (R_n^{hk}\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk})_V \\ + j(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n^{hk}) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk})_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in U^h.$$

Ici,  $R_n^{hk}$  représente l'approximation discrète de l'opérateur  $\mathcal{R}$  à l'instant  $t_n$ , défini par

$$(5.66) \quad (R_n^{hk}\mathbf{w}, \mathbf{v}^h)_V = (\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_Q + (C_n^{hk}\mathbf{w}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_Q \quad \forall \mathbf{v}^h \in U^h,$$

dans lequel  $\mathbf{u}_n^{hk}$  est calculé en utilisant (5.60). Sous les hypothèses du Théorème 5.1, et avec des arguments similaires, nous pouvons facilement vérifier que l'inégalité discrète (5.65) admet une unique solution.

Nous nous attaquons maintenant à l'analyse de l'erreur de discrétisation entre les solutions des Problèmes  $\mathcal{P}_V$  et  $\mathcal{P}_V^{hk}$ .

D'après les hypothèses (5.8)(c) et (5.13)(d), pour tout  $\mathbf{v}^h \in U^h$ , nous avons

$$(5.67) \quad m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{hk})\|_Q^2 \\ \leq (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{hk}))_Q \\ \leq (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{hk}))_Q \\ + \int_{\Gamma_3} (p(w_{n\nu}) - p(w_{n\nu}^{hk}))(w_{n\nu} - w_{n\nu}^{hk}) da$$

et en utilisant maintenant la définition (5.26) de l'opérateur  $A$ , nous déduisons que

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_n^{hk}))_Q \\ + \int_{\Gamma_3} (p(w_{n\nu}) - p(w_{n\nu}^{hk}))(w_{n\nu} - w_{n\nu}^{hk}) da \\ = (A\mathbf{w}_n - A\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk})_V \\ = (A\mathbf{w}_n - A\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)_V + (A\mathbf{w}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk})_V \\ - (A\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk})_V.$$

Nous utilisons ensuite (5.30) avec  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_n^{hk}$  et (5.65) pour trouver que

$$(5.68) \quad (A\mathbf{w}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk})_V - (A\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk})_V \leq (A\mathbf{w}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n)_V \\ + (R_n^{hk}\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk})_V + ((\mathcal{R}\mathbf{w})_n, \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{w}_n)_V \\ + j(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n^{hk}) + j(\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n^{hk}) - j(\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n) + (\mathbf{f}_n, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)_V.$$

Après, en combinant (5.67) et (5.68),

$$(5.69) \quad m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(\mathbf{w}_n) - \varepsilon(\mathbf{w}_n^{hk})\|_Q^2 \leq Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5,$$

où

$$\begin{aligned} Z_1 &= (A\mathbf{w}_n - A\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)_V, \\ Z_2 &= (A\mathbf{w}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n)_V + ((\mathcal{R}\mathbf{w})_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n)_V \\ &\quad + j(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n) - (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n)_V, \\ Z_3 &= j(\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n^{hk}) - j(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n^{hk}) + j(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n) - j(\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n), \\ Z_4 &= j(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) - j(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}^h) + j(\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n) - j(\mathbf{w}_n^{hk}, \mathbf{w}_n), \\ Z_5 &= (R_n^{hk} \mathbf{w}_n^{hk} - (\mathcal{R}\mathbf{w})_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk})_V. \end{aligned}$$

Maintenons, nous procédons à l'estimation de chacun des termes. Pour le premier terme, nous avons la même inégalité que (5.32)

$$\begin{aligned} (5.70) \quad |Z_1| &\leq \left| \int_{\Omega} (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{w}_n) - \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{w}_n^{hk})) \cdot \varepsilon(\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_3} (p(w_{n\nu}) - p(w_{n\nu}^{hk}))(w_{n\nu} - v_{\nu}^h) da \right| \\ &\leq L_{\mathcal{A}} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V + L_p \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq (L_{\mathcal{A}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V. \end{aligned}$$

Le second terme  $Z_2$  peut être vu comme un résidu. Nous avons alors

$$\begin{aligned} (5.71) \quad |Z_2| &= \left| \int_{\Omega} \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{w}_n) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n) dx + \int_{\Omega} \mathcal{B}\varepsilon(\mathcal{S}\mathbf{w}_n) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \left( \int_0^{t_n} \mathcal{K}(t_n - s) \varepsilon(\mathbf{w}_n(s)) ds \right) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n) dx + \int_{\Gamma_3} p(w_{n\nu})(v_{\nu}^h - w_{n\nu}) da \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_3} \mu p(w_{n\nu})(\|\mathbf{v}_{\tau}^h\| - \|\mathbf{w}_{n\tau}\|) da - (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n)_V \right|. \end{aligned}$$

D'où l'estimation suivante

$$\begin{aligned} (5.72) \quad |Z_2| &\leq (\|\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{w}_n)\|_V + \|\mathcal{B}\varepsilon(\mathcal{S}\mathbf{w}_n)\|_V) \|\varepsilon(\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)\|_V \\ &\quad + (\|\mathcal{K}(t_n - s) \varepsilon(\mathbf{w}_n(s))\|_{L^\infty([0, t_n]; V)} + \|\mathbf{f}_n\|_V) \|\varepsilon(\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)\|_V \\ &\quad + (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|p(w_{n\nu})\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

En utilisant des arguments similaires à ceux employés dans (5.34), nous déduisons

$$(5.73) \quad |Z_3| \leq c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V^2.$$

De même, pour le terme  $Z_4$ , nous obtenons

$$(5.74) \quad |Z_4| \leq c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V.$$

Pour le dernier terme  $Z_5$ , nous avons

$$(5.75) \quad \begin{aligned} |Z_5| &= (R_n^{hk} \mathbf{w} - (\mathcal{R}\mathbf{w})_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk})_V + (R_n^{hk}(\mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{w}_n), \mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk})_V \\ &\leq \|R_n^{hk} \mathbf{w} - (\mathcal{R}\mathbf{w})_n\|_Q \|\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V + \|R_n^{hk}(\mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{w}_n)\|_Q \|\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V. \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur  $\mathcal{C} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; V)$  défini par

$$(\mathcal{C}\mathbf{w}, \mathbf{v})_V = \left( \int_0^t \mathcal{K}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_Q.$$

Ensuite nous avons

$$\|R_n^{hk} \mathbf{w} - (\mathcal{R}\mathbf{w})_n\|_V \leq \|\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}) - \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n)\|_Q + \|C_n^{hk} \mathbf{w} - (C\mathbf{w})_n\|_V.$$

Ici, le terme  $\|C_n^{hk} \mathbf{w} - (C\mathbf{w})_n\|_V$  est, en réalité, l'erreur de la méthode des trapèzes introduite dans (5.60). Par conséquent, en supposant que  $\mathbf{w} \in W^{2,\infty}(0, T; V)$  et que  $\mathcal{K} \in C^2([0, T]; \mathbf{Q}_\infty)$ , nous obtenons l'inégalité suivante

$$(5.76) \quad \begin{aligned} \|C_n^{hk} \mathbf{w} - (C\mathbf{w})_n\|_V &\leq ck^2 \|[\mathcal{K}(t_n - s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}(s))]''\|_{L^\infty(0, t_n; V)} \\ &\leq ck^2 \|\mathbf{w}\|_{W^{2,\infty}(0, T; V)}. \end{aligned}$$

En utilisant (5.9)(b) puis l'inégalité

$$\|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\| \leq \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{w}_j^{hk} - \mathbf{w}_j\|_V + \|\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_0\|_V + I_k(\mathbf{w})$$

nous avons

$$(5.77) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}) - \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n)\|_Q &\leq L_{\mathcal{B}} \|\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_n\| \\ &\leq L_{\mathcal{B}} \left( \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{w}_j^{hk} - \mathbf{w}_j\|_V + \|\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_0\|_V + I_k(\mathbf{w}) \right) \end{aligned}$$

où

$$I_k(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}(s)\|_V ds.$$

Ensuite, nous combinons (5.33), (5.75), (5.76), (5.77) pour voir que

$$\begin{aligned} |Z_5| &\leq L_B \left( \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{w}_j^{hk} - \mathbf{w}_j\|_V + \|\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_0\|_V + I_k(\mathbf{w}) \right. \\ &\quad \left. + k^2 \|\mathbf{w}\|_{W^{2,\infty}(0,T;V)} \right) \|\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V \\ &\quad + (L_B + \max_{s \in [0,T]} \|\mathcal{K}(s)\|_{\mathbf{Q}_\infty}) \sum_{j=0}^n k \|\mathbf{w}_j^{hk} - \mathbf{w}_j\|_V \|\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V \\ &\leq c \left( \sum_{j=0}^n k \|\mathbf{w}_j^{hk} - \mathbf{w}_j\|_V + \|\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_0\|_V + I_k(\mathbf{w}) \right. \\ &\quad \left. + k^2 \|\mathbf{w}\|_{W^{2,\infty}(0,T;V)} \right) \|\mathbf{v}^h - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse de petitesse (5.25), par absorption du troisième terme  $Z_3$  (5.73), et en utilisant finalement l'inégalité élémentaire suivante

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2, \quad \forall \delta > 0, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

nous avons

$$\begin{aligned} (5.78) \quad \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V &\leq c \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V + c \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^{1/2} + c \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V^{1/2} \\ &\quad + c \sum_{j=0}^n k \|\mathbf{w}_j^{hk} - \mathbf{w}_j\|_V + c \|\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_0\|_V + c I_k(\mathbf{w}) + c k^2 \|\mathbf{w}\|_{W^{2,\infty}(0,T;V)}. \end{aligned}$$

Appliquons maintenant le Lemme de Gronwall sous sa forme discrète (Lemme 2.19), nous obtenons de (5.78) que si  $k$  est suffisamment petit, alors

$$\begin{aligned} (5.79) \quad \max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V &\leq c \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} (\|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^{1/2} \\ &\quad + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V^{1/2}) + c (\|\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_0\|_V + I_k(\mathbf{w}) + k^2 \|\mathbf{w}\|_{W^{2,\infty}(0,T;V)}). \end{aligned}$$

En outre, en ayant recours aux inégalités (5.64) et (5.79), nous sommes en mesure d'établir l'estimation de l'erreur suivante.

**Théorème 5.5.** *Supposons que  $k$  est suffisamment petit, avec les régularités  $\mathbf{u} \in W^{3,\infty}(0, T; V)$  et  $\mathcal{K} \in C^2(0, T, \mathbf{Q}_\infty)$ , nous avons l'estimation de l'erreur suivante*

$$(5.80) \quad \begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} (\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\dot{\mathbf{u}}_n - \delta_n \mathbf{u}_n^{hk}\|_V) \\ & \leq c \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} (\|\dot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{v}^h\|_V + \|\dot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^{1/2} + \|\dot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{v}^h\|_V^{1/2}) \\ & \quad + c(\|\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_0\|_V + I_k(\dot{\mathbf{u}}) + k^2 \|\dot{\mathbf{u}}\|_{W^{2,\infty}(0,T;V)}). \end{aligned}$$

De plus si nous choisissons la valeur initiale  $\mathbf{u}_0^h$  de telle manière que

$$(5.81) \quad \|\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_0\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad h \rightarrow 0,$$

et puisque

$$(5.82) \quad I_k(\dot{\mathbf{u}}) \leq ck \|\ddot{\mathbf{u}}\|_{L^1(0,T;V)},$$

nous avons la convergence

$$(5.83) \quad \max_{0 \leq n \leq N} (\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\dot{\mathbf{u}}_n - \delta_n \mathbf{u}_n^{hk}\|_V) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad h, k \rightarrow 0.$$

Nous fournissons maintenant une estimation optimale de l'erreur sous les hypothèses d'extra régularité suivantes :

$$(5.84) \quad \dot{\mathbf{u}} \in C([0, T]; H^2(\Omega)^d), \quad \dot{\mathbf{u}}|_{\Gamma_3} \in C([0, T]; H^2(\Gamma_3)^d),$$

$$(5.85) \quad \boldsymbol{\sigma} \in C([0, T], L^2(\Gamma_3)^d),$$

$$(5.86) \quad \mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega)^d.$$

Par l'égalité (5.19), nous obtenons

$$\begin{aligned} |Z_2| & \leq \left| \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu^h - w_{n\nu}) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau^h - \mathbf{w}_{n\tau}) da \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Gamma_3} p(w_{n\nu}) (v_\nu^h - w_{n\nu}) da + \int_{\Gamma_3} \mu p(w_{n\nu}) (\|\mathbf{v}_\tau^h\| - \|\mathbf{w}_{n\tau}\|) da \right| \\ & \leq (\|\sigma_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| + (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|p(w_{n\nu})\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ & \leq c \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}, \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h. \end{aligned}$$

Alors nous avons

$$(5.87) \quad \begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} (\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\dot{\mathbf{u}}_n - \delta_n \mathbf{u}_n^{hk}\|_V) \\ & \leq c \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} (\|\dot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{v}^h\|_V + \|\dot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Gamma_3)}^{1/2}) \\ & \quad + c(\|\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_0\|_V + I_k(\dot{\mathbf{u}}) + k^2 \|\dot{\mathbf{u}}\|_{W^{2,\infty}([0,T];V)}). \end{aligned}$$



Enfin, pour  $0 \leq n \leq N$ , soit  $\Pi_h \dot{\mathbf{u}}_n \in V^h$ , l'interpolation linéaire par élément fini de la solution  $\dot{\mathbf{u}}_n$ . Puisque la solution  $\dot{\mathbf{u}}_n \in U$ , i.e.  $\dot{\mathbf{u}}_{n\nu} \leq g$ , alors  $\Pi_h \dot{\mathbf{u}}_n \in U^h$ .

La théorie classique de l'interpolation par élément fini (cf [43]) s'applique

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{u}}_n - \Pi_h \dot{\mathbf{u}}_n\|_V &\leq ch \|\dot{\mathbf{u}}_n\|_{H^2(\Omega)^d} \\ \|\dot{\mathbf{u}}_n - \Pi_h \dot{\mathbf{u}}_n\|_{L^2(\Gamma_3)^d} &\leq ch^2 \|\dot{\mathbf{u}}_n\|_{H^2(\Gamma_3)^d}. \end{aligned}$$

En conclusion, nous pouvons en déduire le résultat qui suit.

**Théorème 5.6.** *Sous les conditions de régularité (5.84)–(5.86) et  $\mathcal{K} \in C^2(0, T, \mathbf{Q}_\infty)$ , si  $k$  est suffisamment petit, nous avons l'estimation d'erreur optimale suivante*

$$(5.88) \quad \max_{0 \leq n \leq N} (\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\dot{\mathbf{u}}_n - \delta_n \mathbf{u}_n^{hk}\|_V) \leq c(h + k).$$

Notons au passage que les hypothèses des Théorèmes 5.5 et 5.6 sont plus restrictives que celles fournies par le Théorème 5.1. Toutefois, une rapide consultation de l'état de l'art montre que, en général, la plupart des estimations d'erreur dans les problèmes de contact nécessitent des hypothèses de régularité plus fortes que celles issues du résultat d'existence correspondant. A ce titre, il est possible de se référer à [56] et, plus récemment, à [135]. De ce fait, l'obtention d'estimations de l'erreur similaires à celles figurant dans les Théorèmes 5.5 et 5.6 avec des hypothèses de régularité moindres reste à ce jour un problème ouvert.

## 5.5 Simulations numériques

L'objectif est maintenant de présenter quelques simulations numériques illustrant le comportement de la solution du problème de contact avec frottement  $\mathcal{P}_V$ . On s'attachera en particulier à l'interprétation des simulations numériques ainsi qu'à la validation du résultat de convergence théorique et de l'estimation de l'erreur obtenue dans les sections 5.3 et 5.4, respectivement.

Notons, tout d'abord, que l'implémentation et la procédure algorithmique ne présentent pas de différences notables avec [28, 29], auxquels on pourra se référer pour plus de détails. Ainsi, nous nous contentons de rappeler que là encore, et bien que le problème soit cette fois formulé en vitesse, les conditions de contact avec frottement (5.5) sont traitées en utilisant une approche numérique basée sur la combinaison d'une

méthode de pénalisation, pour traiter les conditions de réponse normale instantanée, et de la méthode du Lagrangien augmenté pour le contact unilatéral en vitesse, une fois que le seuil de vitesse  $g$  a été atteint. Pour les conditions de contact avec frottement (5.6), nous avons également recours au Lagrangien augmenté. De ce fait, nous considérons des noeuds supplémentaires, ici fictifs, pour les multiplicateurs de Lagrange dans le maillage initial. La construction de ces noeuds dépend de l'élément de contact utilisé dans la discrétisation géométrique de  $\Gamma_3$ . Pour l'exemple ci-dessous, il s'agit d'un élément "noeud-rigide", composé d'un noeud sur  $\Gamma_3$  et d'un noeud multiplicateur de Lagrange. Pour de plus amples informations sur le pas de discrétisation et les aspects numériques de la Mécanique du contact, comprenant en particulier des algorithmes similaires à ceux utilisés ici, nous pouvons nous référer à [79, 81, 88, 143].

**Exemple numérique.** Nous considérons la configuration initiale décrite par la Figure 5.1 . Ici,  $\Omega = (0, L) \times (0, l) \subset \mathbb{R}^2$  avec  $L > 0$ ,  $l > 0$  et

$$\Gamma_1 = (\{0\} \times [0, l]) \cup (\{L\} \times [0, l]), \quad \Gamma_2 = [0, L] \times \{l\}, \quad \Gamma_3 = [0, L] \times \{0\}.$$

Le domaine  $\Omega$  représente la coupe transversale d'un corps viscoélastique linéaire tridimensionnel soumis à l'action de forces de traction de manière à ce que l'hypothèse des contraintes planes soit valide. Sur la partie  $\Gamma_1 = (\{0\} \times [0, l]) \cup (\{L\} \times [0, l])$  de la frontière le corps est fixé et, de ce fait, le déplacement  $y$  est nul. Les forces de traction verticales de densité  $\mathbf{f}_2$  agissent sur la partie  $[0, L] \times \{l\}$  de la frontière. Nous supposons qu'aucune force volumique n'agit sur le corps viscoélastique au cours du processus quasi-statique. Le corps est en contact frottant avec un obstacle sur  $\Gamma_3 = [0, L] \times \{0\}$ . Nous rappelons que le contact suit une loi de réponse normale instantanée associée à une loi de frottement de Coulomb tant que la vitesse normale est inférieure à la borne  $g$  et, lorsque cette borne est atteinte, il suit une loi de contact unilatéral en vitesse associée à une loi de Tresca.

Le comportement du matériau est modélisé par une loi constitutive linéaire viscoélastique dans laquelle les tenseurs de viscosité et d'élasticité,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  respectivement, sont donnés par

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\boldsymbol{\tau})_{\alpha\beta} &= \mu_1(\tau_{11} + \tau_{22})\delta_{\alpha\beta} + \mu_2\tau_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^2. \\ (\mathcal{B}\boldsymbol{\tau})_{\alpha\beta} &= \frac{E\kappa}{(1+\kappa)(1-2\kappa)}(\tau_{11} + \tau_{22})\delta_{\alpha\beta} + \frac{E}{1+\kappa}\tau_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^2. \end{aligned}$$

Ici,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des constantes de viscosité,  $E$  et  $\kappa$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau, et  $\delta_{\alpha\beta}$  désigne le symbole de Kronecker.

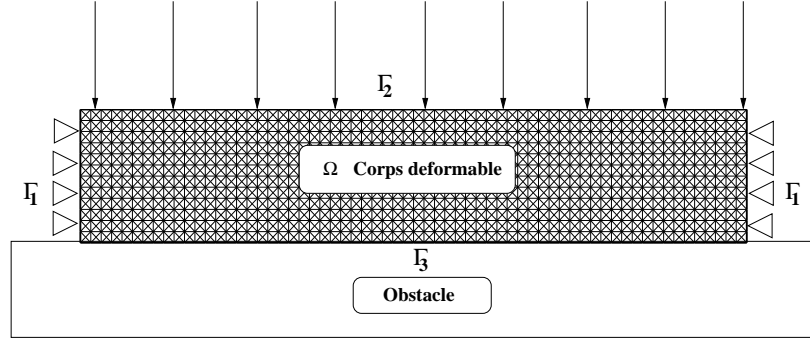


FIGURE 5.1 : Configuration de référence d'un corps bi-dimensionnel.

Pour simplifier l'implémentation numérique et se concentrer sur le comportement des conditions de contact avec frottement, nous considérons que l'opérateur de relaxation  $\mathcal{K}$  est nul.

Pour le calcul ci dessous, nous utilisons les données suivantes :

$$T = 1s, \quad L = 5m, \quad l = 1m,$$

$$\mathbf{u}_0 = 0m, \quad \mu_1 = 0.25GPa.s, \quad \mu_2 = 0.5GPa.s, \quad E = 100GPa, \quad \kappa = 0.3,$$

$$\mathbf{f}_0 = (0, 0)GPa, \quad \mathbf{f}_2 = (0, -10t)GPa.m \quad \text{sur} \quad [0, L] \times \{l\},$$

$$p(r) = c_\nu[r]_+, \quad c_\nu = 10GPa.s, \quad g = 0.01m/s, \quad \mu = 0.2.$$

Dans la Figure 5.2 , nous représentons la configuration déformée ainsi que les forces de contact sur  $I_3$  avec les différents statuts à l'instant final  $t = 1s$ . Ainsi, de part et d'autre de la fondation, on trouve 16 noeuds en statut de réponse normale instantanée (RNI) ; ici, la vitesse normale est telle que  $0 < \dot{u}_\nu < g$ . Les 47 noeuds restants sont en statut de condition unilatérale en vitesse (CUV), puisque la vitesse normale atteint sa borne  $g$ .

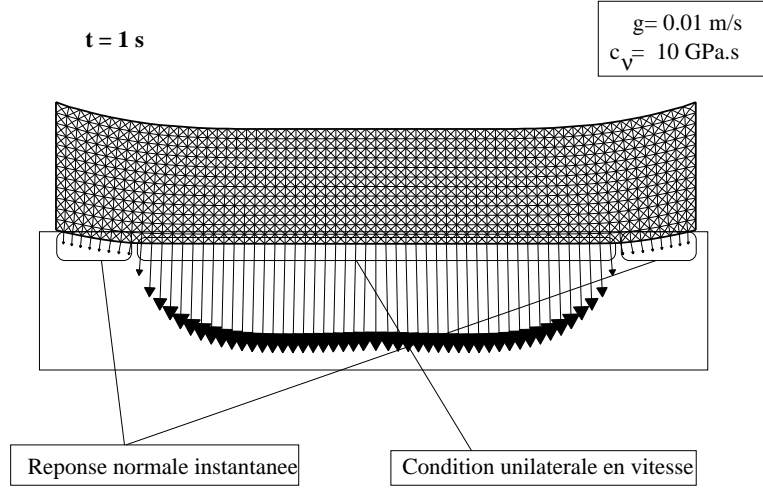


FIGURE 5.2 : Maillage déformé et forces de contact sur  $\Gamma_3$ .

**Comportement de la solution en fonction du temps.** Dans la Figure 5.3 nous fixons  $g = 0.05m/s$  et nous représentons la vitesse normale de ces noeuds à plusieurs instants ( $t = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  et  $1s$ ). Dans cette étude, nous considérons 2 valeurs de  $c_\nu$  ( $c_\nu = 10GPa.s$  et  $c_\nu = 20GPa.s$ ) en l'absence de frottement.

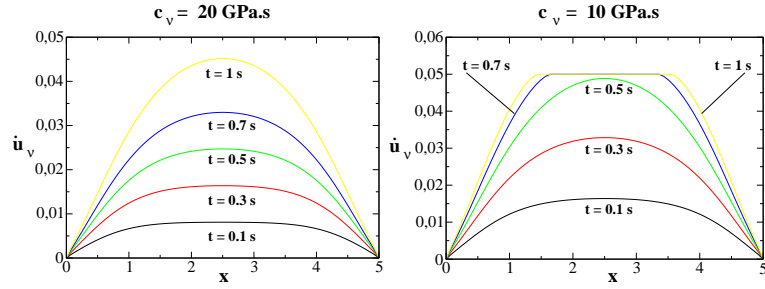


FIGURE 5.3 : Vitesses normales sur  $\Gamma_3$  pour  $g = 0.05m/s$  et pour 2 valeurs de  $c_\nu$  ( $c_\nu = 10GPa.s$  et  $c_\nu = 20GPa.s$ ) en fonction du temps.

Pour  $c_\nu = 20GPa.s$ , comme nous pouvions nous y attendre, la vitesse normale en valeur absolue est une fonction croissante du temps. Ici, puisque la valeur de  $c_\nu$  est grande, les vitesses normales n'atteignent pas la borne  $g$ . Pour  $c_\nu = 10GPa.s$ , la vitesse normale en valeur absolue est également une fonction croissante du temps. Dans ce cas, puisque la valeur de  $c_\nu$  est plus faible que précédemment, plusieurs noeuds passent en statut de condition unilatérale en vitesse après 0.5s et atteignent la valeur  $g$ , comme cela est illustré dans la Figure 5.4 .

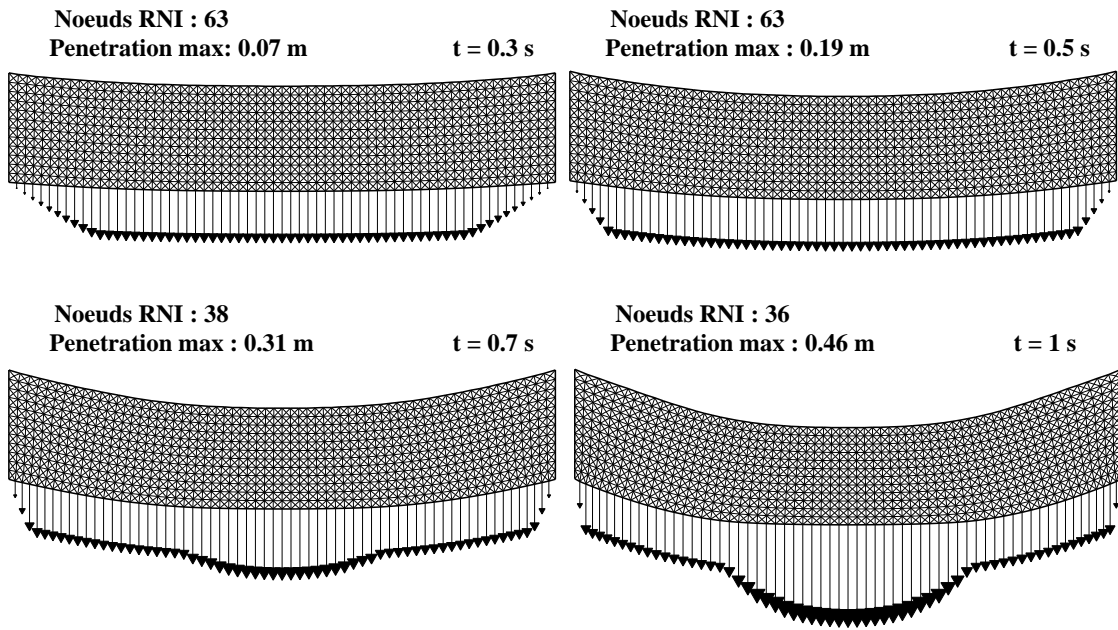


FIGURE 5.4 : Maillages déformés et forces de contact sur  $\Gamma_3$  en fonction du pas de temps pour  $g = 0.05m/s$  et  $c_\nu = 10GPa.s$ .

**Influence des paramètres  $g$  et  $c_v$ .** Par la suite, nous étudions successivement l'influence de 2 paramètres,  $g$  et  $c_v$ , sur le statut des noeuds en contact (RNI ou CUV) et sur la pénétration maximale, sans frottement.

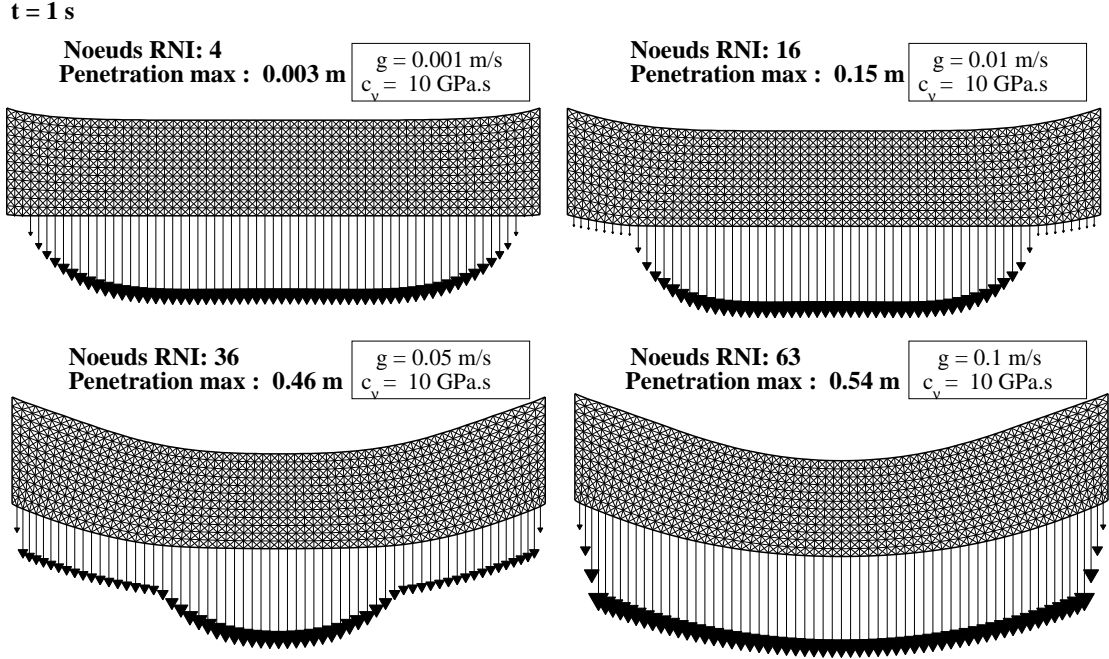


FIGURE 5.5 : Maillages déformés et forces de contact sur  $T_3$  correspondant aux différentes valeurs du coefficient  $g$ .

Nous commençons avec l'influence de  $g$ . Concernant la Figure 5.5, nous pouvons constater que le nombre de noeuds en statut RNI croît en fonction du seuil de la vitesse normale  $g$ . Un tel résultat ne va pas à l'encontre du bon sens dans la mesure où augmenter  $g$  revient à accorder à l'ensemble des noeuds une plus grande liberté de mouvement qu'auparavant. De ce fait, certains noeuds se trouvant en statut de CUV vont passer en statut de RNI. Par conséquent, avec  $g = 0.1 \text{ m/s}$ , tous les noeuds sont en condition de RNI et la pénétration des noeuds en contact augmente quand le seuil de la vitesse normale  $g$  augmente. Nous avons représenté dans la Figure 5.6 les vitesses normales des noeuds sur la zone de contact associées aux cas représentés sur la Figure 5.5. Cela confirme les résultats obtenus précédemment : si  $g$  est suffisamment grand ( $g = 0.1 \text{ m/s}$ ), la vitesse normale des noeuds en contact sera toujours inférieure à cette valeur ; par suite tous les noeuds sont en condition de RNI. Inversement, lorsque  $g$  diminue, la vitesse normale des noeuds est de plus en plus restreinte ; cela signifie que

le nombre de noeuds en CUV augmente.

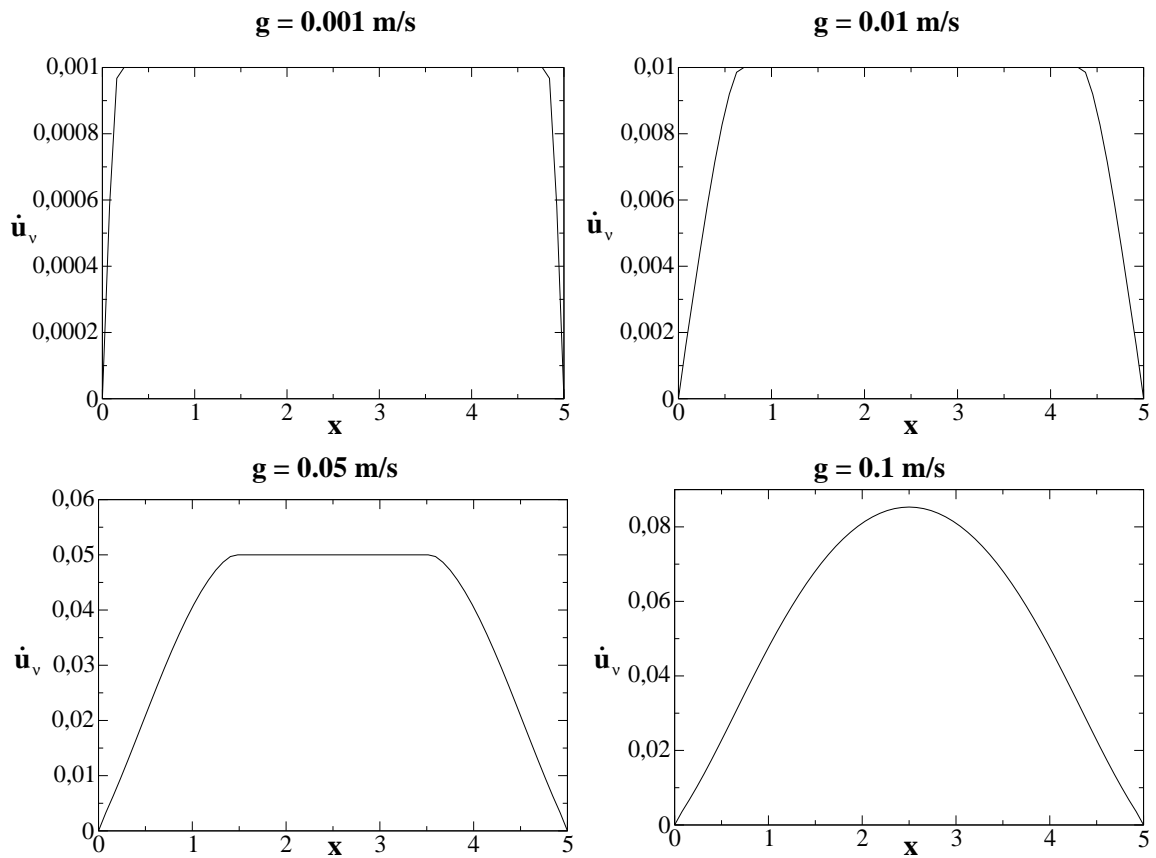


FIGURE 5.6 : Vitesse normale sur  $\Gamma_3$  pour plusieurs valeurs du coefficient  $g$ .

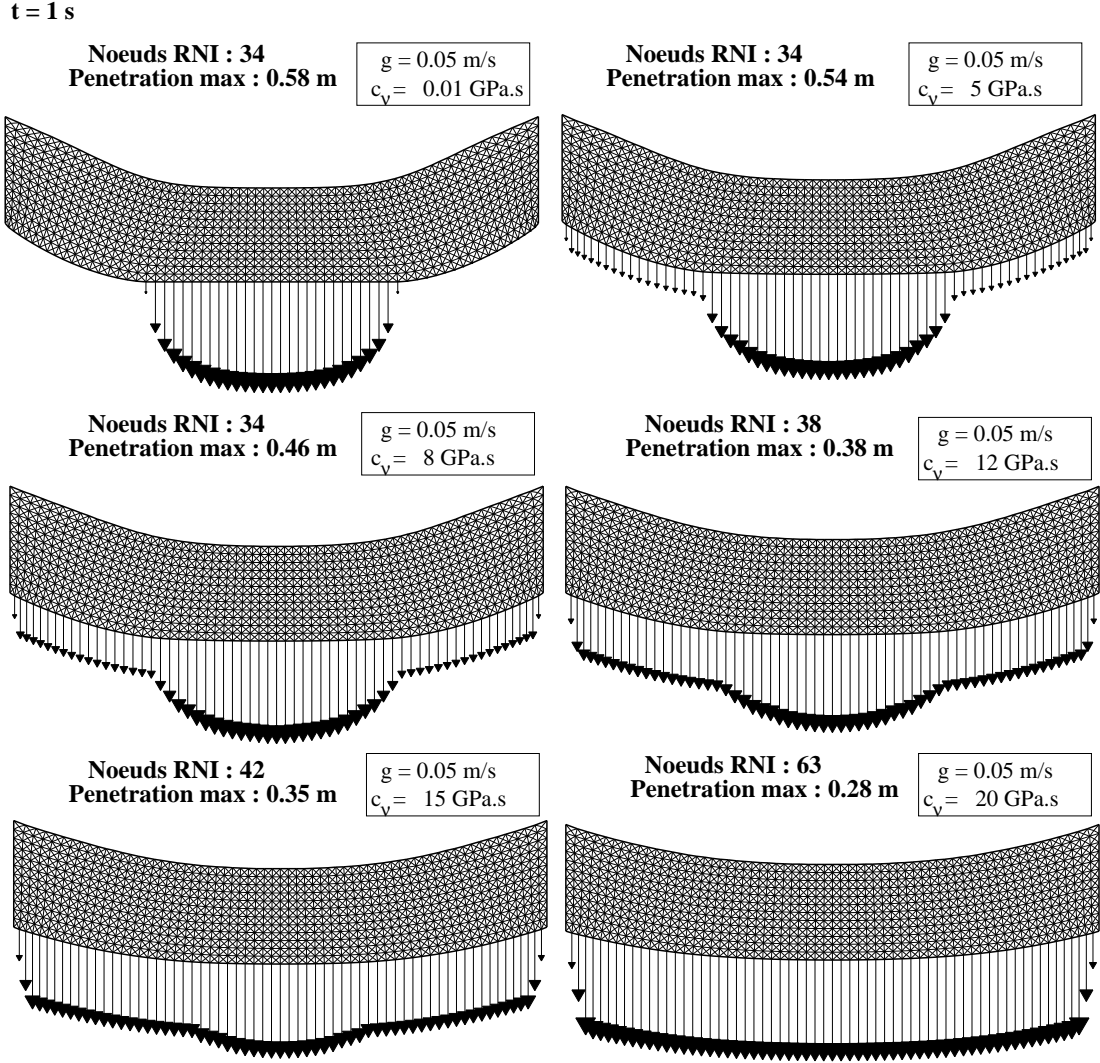


FIGURE 5.7 : Maillages déformés et forces de contact sur  $\Gamma_3$  pour plusieurs valeurs du coefficient  $c_v$ .

Maintenant, intéressons nous à l'influence de  $c_v$ . Dans la Figure 5.7, le nombre de noeuds en statut de RNI croît en fonction de  $c_v$ . Notons que cela n'a toujours rien de surprenant. En effet,  $c_v$  peut être assimilé au coefficient d'amortissement de la fondation ; ainsi, à contrainte normale égale et pour un noeud donné, la vitesse normale associée décroît lorsque  $c_v$  augmente si le noeud se trouve en statut de RNI. Puisque la vitesse normale décroît, un noeud donné, se trouvant auparavant en statut de CUV, peut revenir à un statut de RNI. Par conséquent, avec  $c_v = 20 \text{ GPa.s}$ , tous les noeuds sont en RNI. Par ailleurs, notons que la pénétration maximale dans la fondation



décroît quand le coefficient  $c_\nu$  croît. Nous représentons ensuite dans la Figure 5.8 les vitesses normales des noeuds sur la zone de contact pour les 6 cas exposés dans la Figure 5.7 . Cette Figure 5.8 valide les résultats obtenus précédemment, i.e. quand  $c_\nu$  croît, la proportion des noeuds en contact dont la vitesse normale est limitée décroît. C'est la raison pour laquelle la vitesse normale n'apparaît plus comme limitée pour  $c_\nu = 20 \text{ GPa.s}$ .

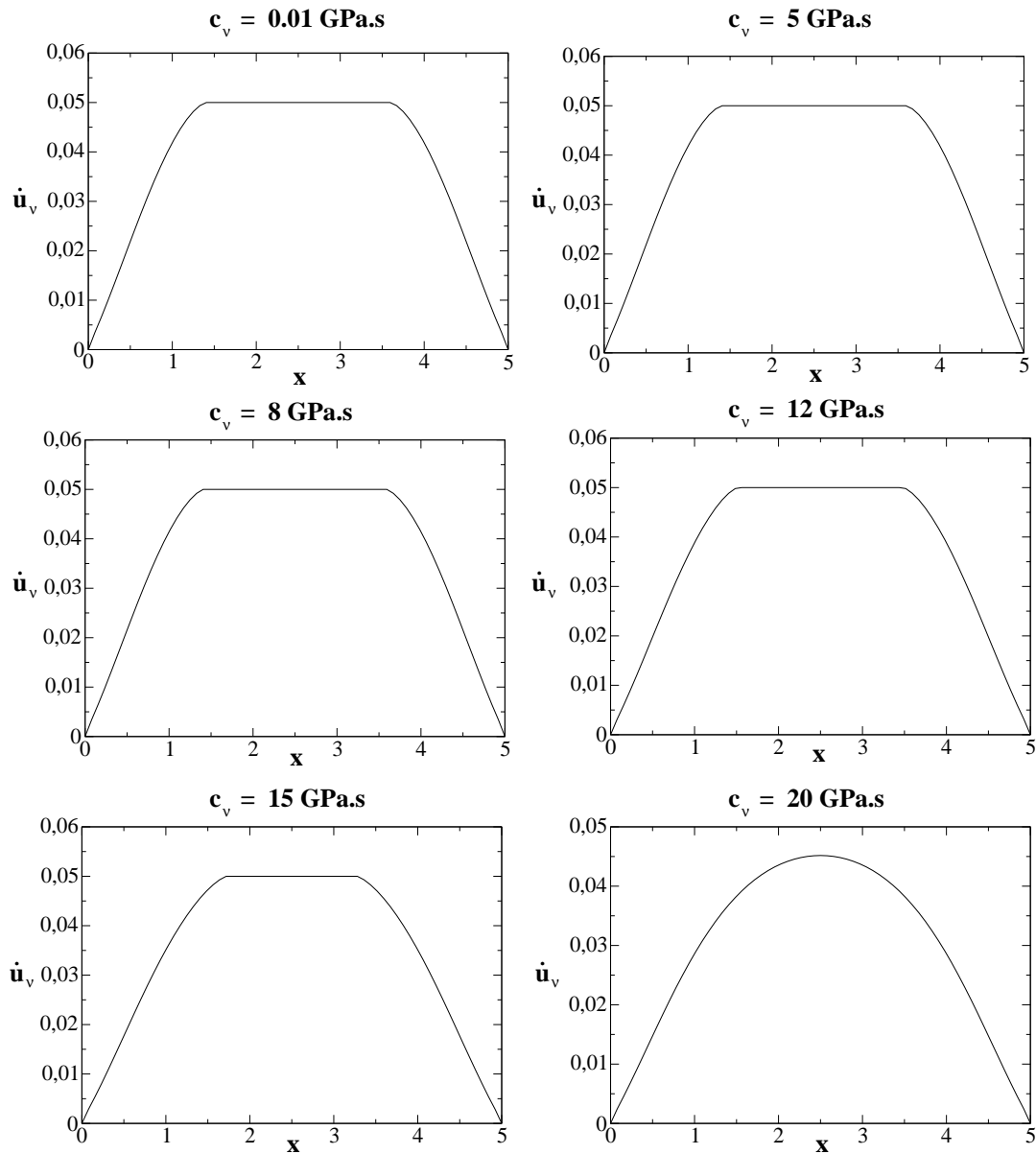


FIGURE 5.8 : Vitesse normale sur  $\Gamma_3$  pour plusieurs valeurs du coefficient  $c_\nu$ .

**Coefficient de frottement.** Nous nous penchons maintenant sur quelques résultats afférents au coefficient de frottement  $\mu$ . A cette fin, nous représentons les maillages déformés et les forces de contact sur  $\Gamma_3$  pour 6 valeurs de  $\mu$  allant de 0 à 1, comme montré dans la Figure 5.9 . Ici, nous fixons  $g = 0.05m/s$  et  $c_\nu = 10GPa.s$ .

$t = 1s$

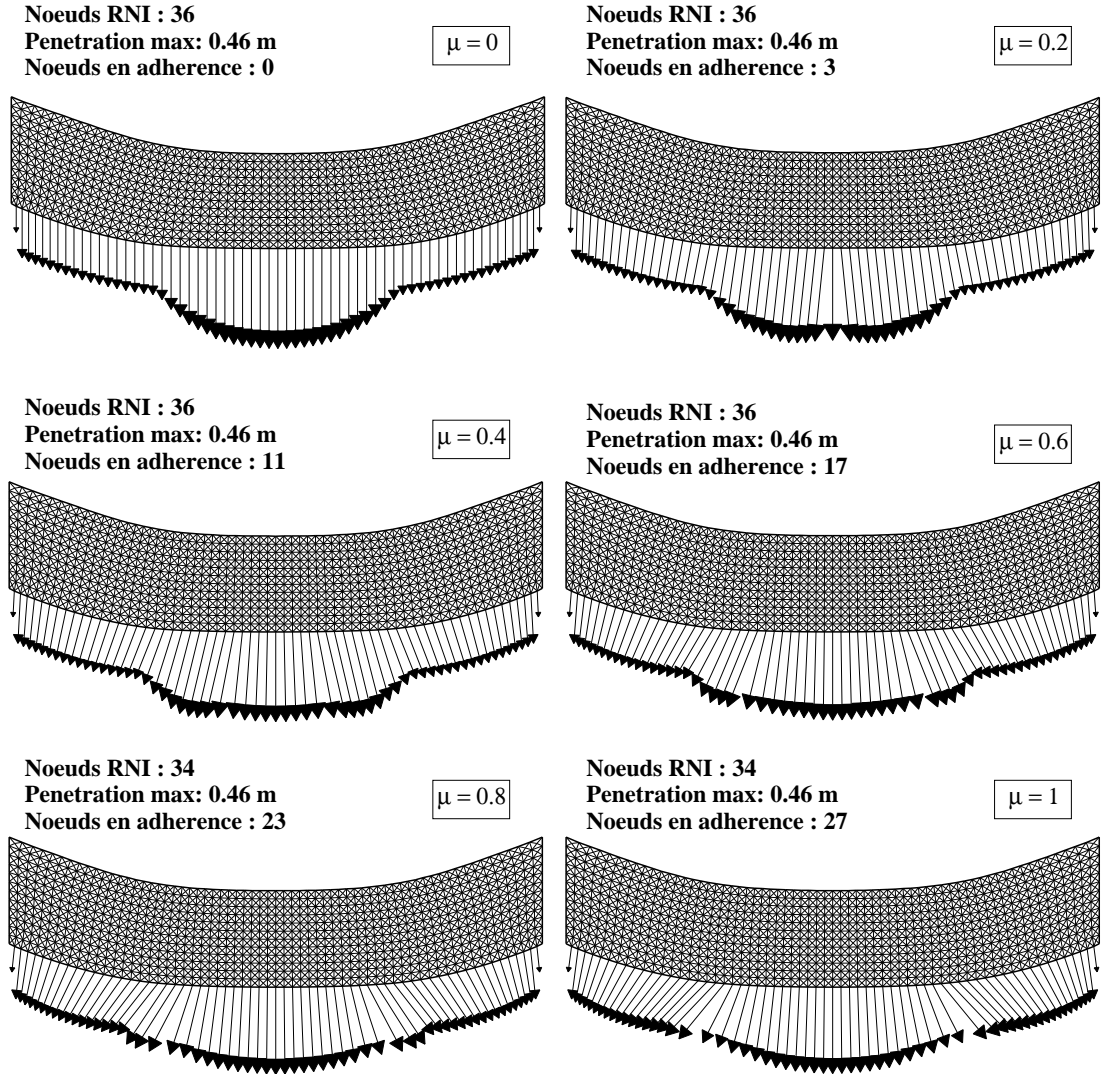


FIGURE 5.9 : Maillages déformés et forces de contact sur  $\Gamma_3$  pour plusieurs valeurs du coefficient  $\mu$ .

Comme on pouvait s'y attendre, sans frottement les forces de contact sont verticales suivant la normale sur  $\Gamma_3$ . Par ailleurs, le nombre de noeuds en adhérence croît en

fonction de  $\mu$ . Pour le cas  $\mu = 0.6$  nous présentons dans la figure 5.10 une description détaillée des statuts des noeuds en contact frottant sur  $\Gamma_3$ . Notez qu'au centre de  $\Gamma_3$ , 17 noeuds sont en statut de CUV et en adhérence (S=). Sur le reste de la zone de contact, les noeuds sont en statut de glissement à gauche (S-) où à droite (S+) pour les conditions de contact unilatéral et de réponse normale instantanée.

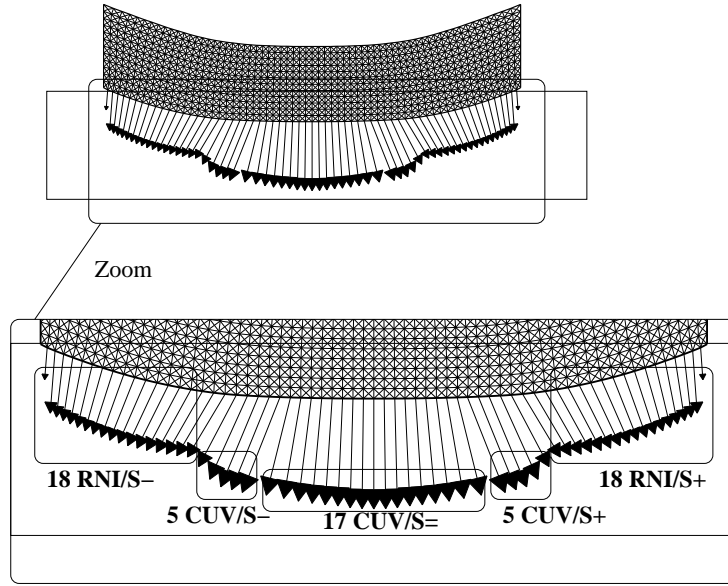


FIGURE 5.10 : Maillage déformé, forces de contact et statut de contact sur  $\Gamma_3$ .

Notons que dans tous les cas exposés, puisque le corps est fixé sur  $\Gamma_1$ , le problème est géométriquement symétrique et de plus les effets de bords ( $x = 0$  et  $x = L$ ) sont clairement visibles.

**Résultat de convergence.** Maintenant, nous passons à la validation numérique du résultat théorique obtenu dans la Section 5.3. Soient  $\mathbf{u}_\rho^{hk}$  et  $\mathbf{u}^{hk}$ , les solutions discrètes des problèmes  $\mathcal{P}_V^\rho$  et  $\mathcal{P}_V$ , respectivement, avec  $\rho > 0$ . Notons que pour le problème  $\mathcal{P}_V^\rho$  nous considérons les données perturbées suivantes  $\mathcal{K}_\rho = \mathcal{K} = 0$ ,  $\mu_\rho = \mu + \rho$ ,  $\mathbf{f}_{0\rho} = \mathbf{f}_0 + \rho$ ,  $\mathbf{f}_{2\rho} = \mathbf{f}_2 + \rho$  qui satisfont les conditions (5.39)–(5.42). Nous calculons les solutions numériques de  $\mathcal{P}_V^\rho$  pour six valeurs de  $\rho$  allant de 0.1 à  $10^{-6}$  et présentons l'estimation de la différence  $\|\mathbf{u}_\rho^{hk} - \mathbf{u}^{hk}\|_V$  à  $t = 1s$  pour les paramètres de discrétisation  $h = 1/16$  et  $k = 1/16$ . Conformément au résultat de convergence théorique, cette différence converge vers zéro lorsque  $\rho$  tend vers zéro.

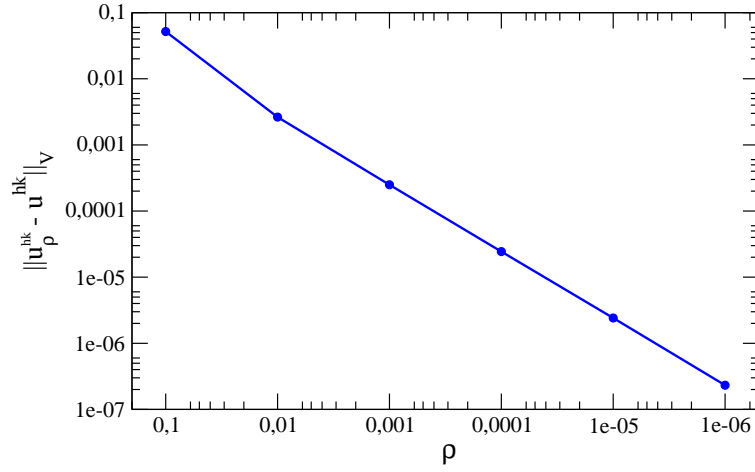


FIGURE 5.11 : Validation numérique du résultat de convergence.

**Estimations de l'erreur.** Afin de vérifier la convergence du schéma discret et d'illustrer l'estimation de l'erreur optimale obtenue dans la Section 5.4, nous calculons une suite de solutions numériques en utilisant des triangularisations uniformes du domaine selon le paramètre de discrétisation spatiale  $h$  et une discrétisation uniforme du temps selon le pas de temps  $k$ . Les valeurs de l'estimation de l'erreur numérique  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{hk}\|_V$ , désignées par  $E^{hk}$  dans la Figure 5.12, sont calculées pour plusieurs valeurs des paramètres de discrétisation spatiale et temporelle,  $h$  et  $k$ . Ici, la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est divisée en  $1/h$  parties égales. Nous commençons avec  $h = 1/4$  et  $k = 1/4$  puis procédons par des divisions successives par deux. La solution numérique correspondant à  $h = 1/256$  et  $k = 1/256$  est considérée comme étant la solution "exacte"; elle sert de référence pour définir les erreurs de la solution numérique pour d'autres valeurs de  $h$  et  $k$ . Cette discrétisation correspond à un problème comportant 784768 degrés de liberté. Les résultats numériques sont présentés dans la Figure 5.12 où est tracée l'estimation de l'erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{hk}\|_V$  en fonction de  $h$  et  $k$ . Notons que ces résultats valident l'estimation optimale théorique obtenue dans la Section 5.4 à savoir le comportement linéairement asymptotique de l'erreur de discrétisation.

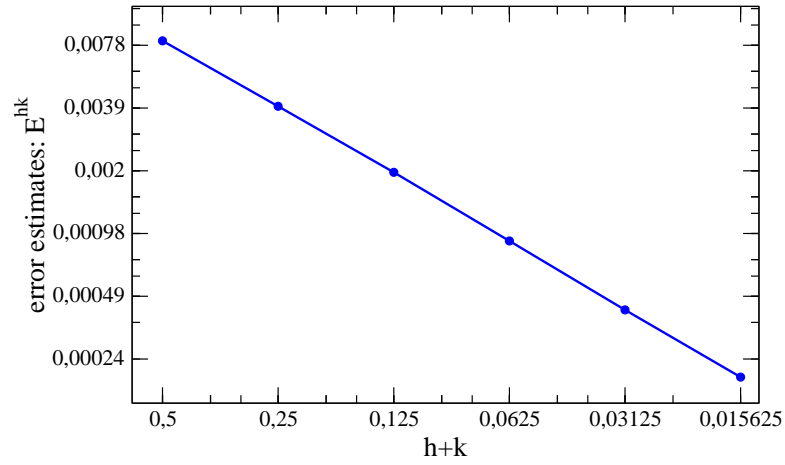


FIGURE 5.12 : Estimations de l'erreur numérique.

**Détails des calculs.** Les détails des simulations numériques présentées dans les Figures 5.2 – 5.10 et liés à  $h = 1/64$  et  $k = 1/64$  sont les suivants. Les problèmes ont été discrétisés avec 3072 éléments finis et 64 éléments de contact ( $h = 1/64$ ) ; le nombre total de degrés de liberté s'élève à 3354. Pour information, avec  $h = 1/64$  et  $k = 1/64$ , la simulation tourne en 32 temps CPU (exprimé en secondes).

## Chapitre 6

# Problème viscoélastodynamique de contact avec compliance normale et frottement non monotone

Ce Chapitre s'inscrit dans la continuité de l'article [21] et des Chapitres précédents. On se propose à présent d'étudier un problème de contact en dynamique modélisant l'interaction entre un corps de type viscoélastique et un obstacle faisant office de fondation. Par rapport au Chapitre 5, nous nous affranchissons du terme mémoire ; par ailleurs le contact obéit à une loi formulée en déplacement, comme dans le Chapitre 4, à la différence que seule la loi de compliance normale est considérée ici pour décrire le comportement de la fondation. Le frottement suit une loi de Coulomb non monotone, conformément au problème exposé dans (1.40), puisque le processus est dynamique (le cas avec contact unilatéral restant à ce jour un problème ouvert). Notons que la question de l'existence ne sera pas abordée ici car elle a déjà été entièrement traitée dans [21]. Nous considérons alors le problème pénalisé utilisé dans l'article sus-cité et nous nous intéressons à l'obtention d'estimations théoriques de l'erreur de discrétisation précédées d'un résultat d'unicité portant sur la solution du problème pénalisé. Dans la première section de ce Chapitre, nous présentons la formulation forte du problème et les hypothèses nécessaires à l'obtention d'une formulation variationnelle. La section 2 sera dédiée à la détermination d'une estimation théorique optimale de l'erreur de discrétisation pour une approximation semi-discrète spatiale. Ensuite, dans la section 3, nous fournissons une estimation théorique optimale de l'erreur de discrétisation pour une approximation temporelle et spatiale. Enfin, la section 4 est consacrée aux

simulations numériques permettant ainsi d'étudier le comportement de la solution et de donner une validation numérique des estimations théoriques de l'erreur de discrétisation. Notons qu'à l'origine, il s'agissait de considérer une géométrie propice à une étude vibratoire pour un problème de contact mais cet aspect des choses se sera pas abordé ici. Ce Chapitre a fait l'objet de l'article [18, 24].

## 6.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Soit  $[0, T]$ , l'intervalle d'étude avec  $T > 0$ . Le problème de contact considéré est de la forme suivante

**Problème  $\mathcal{P}$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$  tels que*

$$(6.1) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(6.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(t) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(6.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$

$$(6.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_2,$$

$$(6.5) \quad -\sigma_\nu(t) = p(u_\nu(t)) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3,$$

$$(6.6) \quad \left. \begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\| &\leq \mu(\|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)\|) p(u_\nu(t)), \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) &= \mu(\|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)\|) p(u_\nu(t)) \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)\|} \quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) \neq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3,$$

pour chaque  $t \in \mathbb{R}_+$  et, en outre,

$$(6.7) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Pour ce problème, l'équation (6.1) représente la loi constitutive viscoélastique du matériau, précédemment introduite dans (1.17). L'équation (6.2) est l'équation de mouvement, avec  $\rho$  la masse volumique (constante). Les conditions (6.3) et (6.4) désignent respectivement les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Les relations (6.5) et (6.6) caractérisent les conditions de contact avec frottement, à savoir une loi de compliance normale combinée à une loi de frottement de Coulomb dans laquelle le coefficient de frottement dépend du taux de glissement, pouvant donc donner lieu à une loi non monotone. Ce type de modèle est en fait une pénalisation du

modèle de contact utilisé dans [21], basé sur une loi de compliance normale restreinte par une contrainte unilatérale. Enfin, (6.7) constitue les conditions initiales, avec  $\mathbf{u}_0$ , le déplacement initial, et  $\mathbf{u}_1$ , la vitesse initiale.

Par l'intermédiaire du lemme 2.4, nous obtenons l'inégalité suivante

$$(6.8) \quad \|\mathbf{v}_\tau\|_{L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^d)}^2 \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|_V^2 + C(\varepsilon) \|\mathbf{v}\|_H^2, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous rappelons également la définition de l'espace  $\mathcal{V}$  défini par  $\mathcal{V} = L^2(0, T; V)$ . A présent, nous supposons que les données du problème respectent les propriétés suivantes. L'opérateur de viscosité  $\mathcal{C} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$(6.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{C}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } c_2 > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq c_2 |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega \text{ avec } c_2 > 0. \\ \text{(c) Il existe } L_C > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_C \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega \text{ avec } L_C > 0 \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{C}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

L'opérateur  $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$(6.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } (\mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq 0 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } L_E > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_E \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega \text{ avec } L_E > 0 \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

La fonction de compliance normale  $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |(p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) Il existe } c_3 > 0 \text{ tel que } p(\mathbf{x}, r) \leq c_3 \quad \forall (\mathbf{x}, r) \in \Gamma_3 \times \mathbb{R}. \\ \text{(c) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \quad \text{pour tout } r \leq 0 \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right.$$

Le coefficient de frottement  $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait

$$(6.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mu \text{ est continu.} \\ \text{(b) } |\mu(s)| \leq c \text{ avec } c > 0, \quad \forall s \geq 0. \\ \text{(c) } \mu(s_1) - \mu(s_2) \geq -\lambda(s_1 - s_2) \quad \forall s_1 > s_2 \geq 0 \text{ avec } \lambda > 0. \end{array} \right.$$



**Remarque 6.1.** Notons que des études comme [35] ont montré que le coefficient de frottement pouvait également dépendre linéairement de la vitesse. L'hypothèse de bornitude (6.12)(b) peut alors être remplacée par une hypothèse plus faible de croissance linéaire. S'il est effectivement possible de traiter un tel problème avec cette hypothèse, moyennant un travail d'estimation plus approfondi (cf [19]), elle complique inutilement le problème. Une hypothèse de bornitude sur le coefficient de frottement constant reste acceptable d'un point de vue physique.

Les grandeurs  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_2$  sont dotées de la régularité suivante

$$(6.13) \quad \mathbf{f}_0 \in L^2(0, T; H), \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)).$$

De plus, nous supposons que les valeurs initiales satisfont

$$(6.14) \quad \mathbf{u}_0 \in V \text{ et } \mathbf{u}_1 \in H.$$

Le sous-différentiel de Clarke, voir la définition 2.15 pour plus de détails, permet d'exprimer la condition de frottement (6.6) sous une autre forme. Pour ce faire, on définit une fonction  $j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$(6.15) \quad j(\boldsymbol{\eta}) = \int_0^{\|\boldsymbol{\eta}\|} \mu(s) ds \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d.$$

Il s'ensuit que, avec les hypothèses (6.12)(a)–(c), la condition (6.6) est équivalente à l'inclusion différentielle suivante :

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau \in p(u_\nu) \partial j(\dot{\mathbf{u}}_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

où  $\partial j(\boldsymbol{\eta})$  désigne le sous-différentiel de Clarke de  $j$  au point  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$ .

Nous considérons les opérateurs  $A : V \rightarrow V^*$ ,  $B : V \rightarrow V^*$ , une fonction  $J : L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbf{f} : (0, T) \rightarrow V^*$ , définis par :

$$(6.16) \quad \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} = \int_{\Omega} \mathcal{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad \text{pour } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

$$(6.17) \quad \langle B\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} = \int_{\Omega} \mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad \text{pour } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

$$(6.18) \quad J(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} j(\mathbf{v}) da \quad \text{pour } \mathbf{v} \in L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d).$$

$$(6.19) \quad \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} = (\mathbf{f}_0(t), \mathbf{v})_H + (\mathbf{f}_2(t), \mathbf{v})_{L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)} \quad \text{pour } \mathbf{v} \in V.$$

Avec (6.9), l'opérateur  $A$  a les propriétés suivantes

$$(6.20) \quad \begin{cases} \text{(a) } A \in \mathcal{L}(V; V^*) \text{ est symétrique.} \\ \text{(b) } \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \leq L_C \|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \\ \text{(c) } \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \geq c_2 \|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{cases}$$

Avec (6.10), l'opérateur  $B$  a les propriétés suivantes

$$(6.21) \quad \begin{cases} \text{(a)} & B \in \mathcal{L}(V; V^*) \text{ est symétrique.} \\ \text{(b)} & \langle B\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \leq L_{\mathcal{E}} \|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \\ \text{(c)} & \langle B\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{cases}$$

Avec (6.12), un élément  $\boldsymbol{\xi}$  du sous-différentiel de la fonction  $J : L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  a les propriétés suivantes

$$(6.22) \quad \begin{cases} \text{(a)} & \|\boldsymbol{\xi}\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \leq c \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial J(\mathbf{v}). \\ \text{(b)} & (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \geq -\lambda \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^2 \\ & \quad \forall \boldsymbol{\xi}_i \in \partial J(\mathbf{v}_i), \quad \forall \mathbf{v}_i \in L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d), \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

A présent, en multipliant l'équation de mouvement par la fonction test  $\mathbf{v}$ , en intégrant sur  $\Omega \times (0, T)$ , par l'intermédiaire de la formule de Green et de la définition des opérateurs, nous obtenons la formulation variationnelle suivante du Problème  $\mathcal{P}$ .

**Problème  $\mathcal{P}_V$**  *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  avec  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}^*$  et une densité de frottement  $\boldsymbol{\xi} \in L^2(0, T, L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d))$  tels que*

$$(6.23) \quad \begin{aligned} & \langle \rho \ddot{\mathbf{u}}(t) + A\dot{\mathbf{u}}(t) + B\mathbf{u}(t) - \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} + (p(u_\nu(t)), v_\nu)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \\ & \quad + (p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t), \mathbf{v}_\tau)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} = 0, \end{aligned}$$

avec

$$(6.24) \quad \boldsymbol{\xi}(t) \in S_{\partial j(\dot{\mathbf{u}}_\tau(t))}^2 \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

où  $S_{\partial j(\dot{\mathbf{u}}_\tau(t))}^2$  désigne l'ensemble des sélections  $L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)$  de  $\partial j(\dot{\mathbf{u}}_\tau(t))$ , autrement dit l'ensemble des fonctions  $\mathbf{h}$  de  $L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)$  vérifiant l'inclusion sous-différentielle  $\mathbf{h} \in \partial j(\dot{\mathbf{u}}_\tau(t))$ , et

$$(6.25) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1.$$

L'existence de la solution du problème  $\mathcal{P}_V$  peut être vu comme un cas particulier du résultat d'existence obtenu dans [21] pour la problème pénalisé (la question de l'unicité n'y ayant pas été traitée). Nous allons alors nous intéresser par la suite à la démonstration de l'unicité de la solution en déplacement. L'unicité de la solution liée à la densité de frottement reste à ce jour un problème ouvert.

**Théorème 6.2.** *Supposons que les conditions (6.9)–(6.14) soient vérifiées. Alors le problème  $\mathcal{P}_V$  a une solution unique en déplacement.*

**Démonstration.** Afin d'établir ce résultat, considérons deux solutions en déplacement du Problème  $\mathcal{P}$ , à savoir  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$ , et soient  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  les vitesses associées telles que, pour  $i = 1, 2$ ,  $\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{w}_i(s)ds$ . Par suite, l'inégalité suivante est vérifiée pour  $i = 1, 2$  :

$$\begin{aligned} \langle \rho \dot{\mathbf{w}}_i(t) + A\mathbf{w}_i(t) + B\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} + (p(u_{i\nu}(t)), v_\nu)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \\ + (p(u_{i\nu}(t))\boldsymbol{\xi}_i(t), \mathbf{v}_\tau)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} = 0, \end{aligned}$$

avec

$$\boldsymbol{\xi}_i(t) \in S_{\partial j(\mathbf{w}_{i\tau}(t))}^2 \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Maintenant, nous considérons la différence de (6.26) pour  $i = 1$  et  $i = 2$  et, en prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho \langle \dot{\mathbf{w}}_1(t) - \dot{\mathbf{w}}_2(t), \mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t) \rangle_{V^* \times V} + \langle A\mathbf{w}_1(t) - A\mathbf{w}_2(t), \mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t) \rangle_{V^* \times V} \\ + \langle B(\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)), \mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t) \rangle_{V^* \times V} \\ + (p(u_{1\nu}(t)) - p(u_{2\nu}(t)), w_{1\nu}(t) - w_{2\nu}(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \\ + (p(u_{1\nu}(t))\boldsymbol{\xi}_1(t) - p(u_{1\nu}(t))\boldsymbol{\xi}_2(t), \mathbf{w}_{1\tau}(t) - \mathbf{w}_{2\tau}(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\ + (p(u_{1\nu}(t))\boldsymbol{\xi}_2(t) - p(u_{2\nu}(t))\boldsymbol{\xi}_2(t), \mathbf{w}_{1\tau}(t) - \mathbf{w}_{2\tau}(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} = 0. \end{aligned}$$

Nous intégrons sur  $t$  pour tout  $t \in [0, T]$ , utilisons la coercivité de  $A$  et les égalités classiques

$$\begin{aligned} \rho \langle \dot{\mathbf{w}}_1(s) - \dot{\mathbf{w}}_2(s), \mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s) \rangle_{V^* \times V} &= \frac{\rho}{2} \frac{d}{ds} \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_H^2, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle B(\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)), \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \rangle_{V^* \times V} &= \frac{1}{2} \left( \langle B(\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)), \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \rangle_{V^* \times V} \right. \\ &\quad \left. + \langle B(\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)), \mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s) \rangle_{V^* \times V} \right) \\ &= \langle B(\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)), \mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s) \rangle_{V^* \times V} \end{aligned}$$

la dernière égalité étant vérifiée puisque  $B$  est symétrique, et nous obtenons

$$\begin{aligned} (6.26) \quad & \frac{\rho}{2} \|\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)\|_H^2 + c_2 \int_0^t \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_V^2 ds \\ & + \langle B(\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)), \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \rangle_{V^* \times V} \\ & + \int_0^t (p(u_{1\nu}(s)) - p(u_{2\nu}(s)), w_{1\nu}(s) - w_{2\nu}(s))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} ds \\ & + \int_0^t (p(u_{1\nu}(s))\boldsymbol{\xi}_1(s) - p(u_{2\nu}(s))\boldsymbol{\xi}_2(s), \mathbf{w}_{1\tau}(s) - \mathbf{w}_{2\tau}(s))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} ds \leq 0. \end{aligned}$$

Avec la forte monotonie de  $B$  dans (6.10), il vient que

$$(6.27) \quad \langle B(\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)), \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \rangle_{V^* \times V} \geq 0.$$

Avec (2.4), (6.11)(a), l'inégalité de Cauchy et l'inégalité classique  $\|\mathbf{u}(t)\|_V \leq \|\mathbf{u}_0\|_V + \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}(s)\|_V ds$  nous avons :

$$(6.28) \quad \begin{aligned} & \int_0^t (p(u_{1\nu}(s)) - p(u_{2\nu}(s)), w_{2\nu}(s) - w_{1\nu}(s))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} ds \\ & \leq \int_0^t c_0^2 L_p \|u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)\|_V \|w_{1\nu}(s) - w_{2\nu}(s)\|_V ds \\ & \leq \frac{c_0^4 L_p^2}{4\varepsilon} \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds + \varepsilon \int_0^t \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_V^2 ds \\ & \leq \frac{c_0^4 L_p^2}{2\varepsilon} \left( \int_0^t \left( \int_0^s \|\mathbf{w}_1(p) - \mathbf{w}_2(p)\|_V dp \right)^2 ds \right) + \varepsilon \int_0^t \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_V^2 ds \\ & \leq \frac{c_0^4 L_p^2 T}{2\varepsilon} \left( \int_0^t \left( \int_0^s \|\mathbf{w}_1(p) - \mathbf{w}_2(p)\|_V^2 dp \right) ds \right) + \varepsilon \int_0^t \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_V^2 ds. \end{aligned}$$

Avec (6.8), (6.11)(b) et (6.22)(b) nous obtenons :

$$(6.29) \quad \begin{aligned} & \int_0^t (p(u_{1\nu}(s))\boldsymbol{\xi}_1(s) - p(u_{1\nu}(s))\boldsymbol{\xi}_2(s), \mathbf{w}_{1\tau}(s) - \mathbf{w}_{2\tau}(s))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} ds \\ & \geq -\lambda c_3 \int_0^t \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^2 ds \\ & \geq -\lambda c_3 \varepsilon \int_0^t \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_V^2 ds - \lambda c_3 C(\varepsilon) \int_0^t L_p \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_H^2 ds. \end{aligned}$$

Ensuite, avec (6.11)(a) et (6.22)(a), en procédant de la même manière que dans (6.28) nous obtenons :

$$(6.30) \quad \begin{aligned} & \int_0^t (p(u_{1\nu}(s))\boldsymbol{\xi}_2(s) - p(u_{2\nu}(s))\boldsymbol{\xi}_2(s), \mathbf{w}_{2\tau}(s) - \mathbf{w}_{1\tau}(s))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} ds \\ & \leq \int_0^t c_0^2 c L_p \|u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)\|_V \|\mathbf{w}_{1\tau}(s) - \mathbf{w}_{2\tau}(s)\|_V ds \\ & \leq \frac{c_0^4 c^2 L_p^2 T}{2\varepsilon} \left( \int_0^t \left( \int_0^s \|\mathbf{w}_1(p) - \mathbf{w}_2(p)\|_V^2 dp \right) ds \right) + \varepsilon \int_0^t \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_V^2 ds. \end{aligned}$$

En combinant (6.26)–(6.30), nous avons

$$\begin{aligned}
 (6.31) \quad & \frac{\rho}{2} \|\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)\|_H^2 + (c_2 - (\lambda c_3 + 2)\varepsilon) \int_0^t \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_V^2 ds \\
 & \leq \frac{c_0^4 L_p^2 T(1 + c^2)}{2\varepsilon} \left( \int_0^t \left( \int_0^s \|\mathbf{w}_1(r) - \mathbf{w}_2(r)\|_V^2 dr \right) ds \right) \\
 & \quad + \lambda c_3 C(\varepsilon) \int_0^t \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_H^2 ds.
 \end{aligned}$$

**Remarque 6.3.** Notons que, si  $\varepsilon$  est suffisamment petit,  $c_2 - (\lambda c_3 + 2)\varepsilon > 0$ .

Ainsi

$$\begin{aligned}
 (6.32) \quad & \|\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)\|_H^2 + \int_0^t \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_V^2 ds \\
 & \leq C \int_0^t \left( \|\mathbf{w}_1(s) - \mathbf{w}_2(s)\|_H^2 + \int_0^s \|\mathbf{w}_1(r) - \mathbf{w}_2(r)\|_V^2 dr \right) ds,
 \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante positive générique.  $\square$

A l'aide du Lemme 2.18, nous déduisons que  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ , ce qui conclut la preuve.

## 6.2 Approximation spatiale et estimation de l'erreur

Nous considérons et analysons ici une approximation semi-discrète spatiale du Problème  $\mathcal{P}_V$ . Pour la discrétisation spatiale, nous considérons un domaine polyédrique  $\Omega$  et choisissons une famille d'éléments finis réguliers constituant une partition de  $\overline{\Omega}$ . Soit  $V^h \subset V$ , un sous-espace d'éléments finis de fonctions linéaires par morceaux et compatible avec la partition de la frontière  $\Gamma$ . Ici,  $h > 0$  désigne le paramètre de discrétisation spatiale. L'approximation semi-discrète du Problème  $\mathcal{P}_V$  est la suivante

**Problème  $\mathcal{P}_V^h$**  *Trouver un champ de déplacement  $\mathbf{u}^h \in L^2(0, T, V^h)$  avec  $\dot{\mathbf{u}}^h, \ddot{\mathbf{u}}^h \in L^2(0, T, V^h)$  et une densité de frottement  $\boldsymbol{\xi}^h \in L^2(0, T, L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d))$  tels que*

$$\begin{aligned}
 (6.33) \quad & \langle \rho \ddot{\mathbf{u}}^h(t) + A \dot{\mathbf{u}}^h(t) + B \mathbf{u}^h(t) - \mathbf{f}(t), \mathbf{v}^h(t) \rangle_{V^* \times V} + (p(u_\nu^h(t)), v_\nu^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \\
 & + (p(u_\nu^h(t)) \boldsymbol{\xi}_n^h, \mathbf{v}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} = 0 \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h, \text{ p.p. } t \in (0, T)
 \end{aligned}$$

avec

$$(6.34) \quad \boldsymbol{\xi}^h(t) \in S_{\partial j(\dot{\mathbf{u}}_\tau^h(t))}^2 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

et

$$(6.35) \quad \mathbf{u}^h(0) = \mathbf{u}_0^h, \quad \dot{\mathbf{u}}^h(0) = \mathbf{u}_1^h.$$

Dans ce qui suit, nous cherchons à analyser l'erreur entre la solution en déplacement du Problème  $\mathcal{P}_V$  et son approximation semi-discrète  $\mathcal{P}_V^h$ . L'erreur en densité de frottement  $\boldsymbol{\xi}$  reste également un problème ouvert. Le résultat principal de la section est résumé dans le théorème suivant.

**Théorème 6.4.** *Sous les hypothèses (6.9)–(6.14) et avec les régularités  $\dot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; H^2(\Omega; \mathbb{R}^d))$ ,  $\ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; H^2(\Omega; \mathbb{R}^d))$  et  $\dot{\mathbf{u}}_\tau \in L^2(0, T; H^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d))$ , nous avons l'estimation d'erreur optimale suivante*

$$\|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{C(0, T; H)}^2 + \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_V^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C(0, T; V)}^2 \leq Ch,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

**Démonstration.** Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^h$  dans (6.23) et nous le combinons avec (6.33) afin d'obtenir :

$$(6.36) \quad \begin{aligned} & \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}^h(t)) + A(\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)) + B(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)), \mathbf{v}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \\ & + (p(u_\nu(t)) - p(u_\nu^h(t)), v_\nu^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} + (p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}^h(t), \mathbf{v}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\ & = 0. \end{aligned}$$

A présent, en prenant  $\mathbf{v}^h = \dot{\mathbf{u}}^h(t)$  dans (6.36) et en combinant l'égalité ainsi obtenue avec (6.36), nous obtenons

$$(6.37) \quad \begin{aligned} & \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}^h(t)) + A(\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)) + B(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)), \mathbf{v}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \\ & + (p(u_\nu(t)) - p(u_\nu^h(t)), v_\nu^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} + (p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}^h(t), \mathbf{v}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\ & = \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}^h(t)) + A(\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)) + B(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)), \dot{\mathbf{u}}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \\ & + (p(u_\nu(t)) - p(u_\nu^h(t)), \dot{u}_\nu^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} + (p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}^h(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Après une reformulation de (6.37) sous la forme  $(., \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)) = (., \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v}^h(t))$ , il vient que

$$\begin{aligned}
 (6.38) \quad & \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}^h(t)) + A(\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)) + B(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \\
 & + (p(u_\nu(t)) - p(u_\nu^h(t)), \dot{u}_\nu(t) - \dot{u}_\nu^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \\
 & + (p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}^h(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\
 & = \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}^h(t)) + A(\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)) + B(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)), \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \\
 & + (p(u_\nu(t)) - p(u_\nu^h(t)), \dot{u}_\nu(t) - v_\nu^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \\
 & + (p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}^h(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}.
 \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 (6.39) \quad & \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}^h(t)) + A(\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)) + B(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \\
 & + (p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\
 & + (p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}^h(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\
 & = \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}^h(t)) + A(\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)) + B(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)), \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \\
 & + (p(u_\nu(t)) - p(u_\nu^h(t)), (\dot{u}_\nu^h(t) - \dot{u}_\nu(t)) + (\dot{u}_\nu(t) - v_\nu^h(t)))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \\
 & + (p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}^h(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, après quelques manipulations élémentaires, il vient que

$$\begin{aligned}
 (6.40) \quad & \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}^h(t)) + A(\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)) + B(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \\
 & + (p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}^h(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\
 & = \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}^h(t)) + A(\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)) + B(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)), \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \\
 & + (p(u_\nu(t)) - p(u_\nu^h(t)), (\dot{u}_\nu^h(t) - \dot{u}_\nu(t)) + (\dot{u}_\nu(t) - v_\nu^h(t)))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \\
 & + (p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}^h(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\
 & + (p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons aisément montrer que

$$(6.41) \quad \langle \ddot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}^h(t), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t) \rangle_{V^* \times V} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)\|_H^2.$$

Avec la coercivité de  $A$  en (6.20), nous avons

$$(6.42) \quad \langle A\dot{\mathbf{u}}(t) - A\dot{\mathbf{u}}^h(t), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \geq c_2 \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)\|_V^2.$$

Puisque l'opérateur  $B$  est, d'après (6.21), symétrique il vient que

$$(6.43) \quad \langle B\mathbf{u}(t) - B\mathbf{u}^h(t), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t) \rangle_{V^* \times V} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle B\mathbf{u}(t) - B\mathbf{u}^h(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t) \rangle_{V^* \times V}.$$

D'après (6.8), (6.11)(b) et (6.22)(b), nous avons

$$(6.44) \quad \begin{aligned} & (p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}^h(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\ & \geq -\lambda c_3 \|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^h(t)\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^2 \\ & \geq -\lambda c_3 (\varepsilon \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)\|_V^2 + C(\varepsilon) \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)\|_H^2). \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de (6.40)–(6.44), nous obtenons

$$(6.45) \quad \begin{aligned} & \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)\|_H^2 + (c_2 - \lambda c_3 \varepsilon) \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)\|_V^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle B\mathbf{u}(t) - B\mathbf{u}^h(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \\ & \leq \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}^h(t)) + A(\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)) + B(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{v}}^h(t) \rangle_{V^* \times V} \\ & + (p(u_\nu(t)) - p(u_\nu^h(t)), (\dot{u}_\nu^h(t) - \dot{u}_\nu(t)) + (\dot{u}_\nu(t) - \dot{u}_\nu^h(t)))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \\ & + (p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}^h(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \dot{\mathbf{v}}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\ & + (p(u_\nu^h(t))\boldsymbol{\xi}(t) - p(u_\nu(t))\boldsymbol{\xi}(t), \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^h(t))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\ & + \lambda c_3 C(\varepsilon) \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)\|_H^2. \end{aligned}$$

Maintenant, nous procédons à une intégration de 0 à  $t$ , avec  $t \in [0, T]$ , sur (6.45). Puis, nous utilisons ensuite la formule d'intégration par parties et l'inégalité  $ab \leq \varepsilon a^2 + b^2/4\varepsilon$  pour avoir

$$(6.46) \quad \begin{aligned} & \int_0^t \langle \ddot{\mathbf{u}}(s) - \ddot{\mathbf{u}}^h(s), \dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{v}}^h(s) \rangle_{V^* \times V} ds = (\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t), \dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{v}}^h(t))_H \\ & - (\dot{\mathbf{u}}(0) - \dot{\mathbf{u}}^h(0), \dot{\mathbf{u}}(0) - \dot{\mathbf{v}}^h(0))_H - \int_0^t \langle \dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{u}}^h(s), \ddot{\mathbf{u}}(s) - \ddot{\mathbf{v}}^h(s) \rangle_{V^* \times V} ds \\ & \leq \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)\|_H \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{v}}^h(t)\|_H + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^h\|_H \|\mathbf{u}_1 - \dot{\mathbf{v}}^h(0)\|_H \\ & + \int_0^t \langle \dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{u}}^h(s), \ddot{\mathbf{u}}(s) - \ddot{\mathbf{v}}^h(s) \rangle_{V^* \times V} ds \\ & \leq \frac{1}{4} \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)\|_H^2 + \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{v}}^h(t)\|_H^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^h\|_H \|\mathbf{u}_1 - \dot{\mathbf{v}}^h(0)\|_H \\ & + \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_V^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{v}}^h\|_{V^*}^2. \end{aligned}$$



Etant donné que l'opérateur  $A$  est de Lipschitz, d'après (6.20), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (6.47) \quad & \int_0^t \langle A\dot{\mathbf{u}}(s) - A\dot{\mathbf{u}}^h(s), \dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{v}}^h(s) \rangle_{V^* \times V} ds \\
 & \leq \int_0^t L_C \|\dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{u}}^h(s)\|_V \|\dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{v}}^h(s)\|_V ds \\
 & \leq \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{\mathcal{V}}^2 + \frac{L_C^2}{4\varepsilon} \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}^h\|_{\mathcal{V}}^2.
 \end{aligned}$$

L'opérateur  $B$  est également de Lipschitz, d'après (6.21), de ce fait

$$\begin{aligned}
 (6.48) \quad & \int_0^t \langle B\mathbf{u}(s) - B\mathbf{u}^h(s), \dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{v}}^h(s) \rangle_{V^* \times V} ds \\
 & \leq \int_0^t L_E \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}^h(s)\|_V \|\dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{v}}^h(s)\|_V ds \\
 & \leq \varepsilon \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{\mathcal{V}}^2 + \frac{L_E^2}{4\varepsilon} \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}^h\|_{\mathcal{V}}^2,
 \end{aligned}$$

en outre, puisque

$$\begin{aligned}
 (6.49) \quad & \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)\|_V \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V + \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{u}}^h(s)\|_V ds \\
 & \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V + \sqrt{T} \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{\mathcal{V}},
 \end{aligned}$$

nous avons, avec l'inégalité  $2ab \leq a^2 + b^2$

$$\begin{aligned}
 (6.50) \quad & \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)\|_V^2 \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + T \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{\mathcal{V}}^2 \\
 & \quad + 2\sqrt{T} \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{\mathcal{V}} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V \\
 & \leq 2\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + 2T \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{\mathcal{V}}^2,
 \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
 (6.51) \quad & \int_0^t \langle B\mathbf{u}(s) - B\mathbf{u}^h(s), \dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{v}}^h(s) \rangle_{V^* \times V} ds \\
 & \leq \varepsilon 2T \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + \varepsilon 2T^2 \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{\mathcal{V}}^2 + \frac{L_E^2}{4\varepsilon} \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}^h\|_{\mathcal{V}}^2.
 \end{aligned}$$

Avec (2.4), (6.11)(a) et (6.49), nous avons :

$$\begin{aligned}
 (6.52) \quad & \int_0^t (p(u_\nu(s)) - p(u_\nu^h(s)), (\dot{u}_\nu^h(s) - v_\nu^h(s)))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} ds \\
 & \leq \int_0^t c_0^2 L_p \|u_\nu(s) - u_\nu^h(s)\|_V \|\dot{u}_\nu^h(s) - v_\nu^h(s)\|_V ds \\
 & \leq \frac{c_0^4 L_p^2}{4\varepsilon} \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}^h(s)\|_V^2 ds + \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}^h\|_V^2 + \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_V^2 \\
 & \leq \frac{2c_0^4 L_p^2}{4\varepsilon} \left( \int_0^t \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 ds + \int_0^t \left( \int_0^s \|\dot{\mathbf{u}}(r) - \dot{\mathbf{u}}^h(r)\|_V dr \right)^2 ds \right) \\
 & \quad + \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}^h\|_V^2 + \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_V^2 \\
 & \leq \frac{c_0^4 L_p^2}{2\varepsilon} \left( \int_0^t \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 ds + \int_0^t \left( \sqrt{s} \sqrt{\int_0^s \|\dot{\mathbf{u}}(r) - \dot{\mathbf{u}}^h(r)\|_V^2 dr} \right)^2 ds \right) \\
 & \quad + \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}^h\|_V^2 + \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_V^2 \\
 & \leq \frac{c_0^4 L_p^2}{2\varepsilon} \left( T \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + T \int_0^t \left( \int_0^s \|\dot{\mathbf{u}}(r) - \dot{\mathbf{u}}^h(r)\|_V^2 dr \right) ds \right) \\
 & \quad + \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}^h\|_V^2 + \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_V^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant à présent (2.4), (6.11)(b) et (6.22)(a) nous avons :

$$\begin{aligned}
 (6.53) \quad & \int_0^t (p(u_\nu(s))\boldsymbol{\xi}(s) - p(u_\nu^h(s))\boldsymbol{\xi}^h(s), \dot{\mathbf{u}}_\tau(s) - \mathbf{v}_\tau^h(s))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} ds \\
 & \leq \int_0^t 2c_3 c \|\dot{\mathbf{u}}_\tau(s) - \mathbf{v}_\tau^h(s)\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} ds \\
 & \leq 2c_3 c \sqrt{T} \|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}_\tau^h\|_{L^2(0,T; L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d))}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, à partir de (2.4), (6.11)(a) et (6.22)(a) (et également (6.52)), nous avons

$$\begin{aligned}
 (6.54) \quad & \int_0^t (p(u_\nu^h(s))\boldsymbol{\xi}(s) - p(u_\nu(s))\boldsymbol{\xi}(s), \dot{\mathbf{u}}_\tau(s) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^h(s))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} ds \\
 & \leq \int_0^t c_0 L_p c \|u_\nu(s) - u_\nu^h(s)\|_V \|\dot{\mathbf{u}}_\tau(s) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^h(s)\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} ds \\
 & \leq \frac{c_0^4 L_p^2 c^2}{4\varepsilon} \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}^h(s)\|_V^2 ds + \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_V^2 \\
 & \leq \frac{2c_0^4 L_p^2 c^2}{4\varepsilon} \left( T \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + T \int_0^t \left( \int_0^s \|\dot{\mathbf{u}}(r) - \dot{\mathbf{u}}^h(r)\|_V^2 dr \right) ds \right) + \varepsilon \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_V^2.
 \end{aligned}$$

**Remarque 6.5.** Notons que, à partir de maintenant, la constante positive désignée par  $C$  peut différer d'une ligne à l'autre.

Nous intégrons (6.45), combinons (6.46)–(6.54) et utilisons la forte monotonie de l'opérateur  $B$  pour obtenir

$$(6.55) \quad \frac{\rho}{4} \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)\|_H^2 + (c_2 - (\lambda c_3 + 4 + 2T^2)\varepsilon) \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{u}}^h(s)\|_V^2 ds \\ \leq C\alpha + C \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{u}}^h(s)\|_H^2 ds + C \int_0^t \left( \int_0^s \|\dot{\mathbf{u}}(r) - \dot{\mathbf{u}}^h(r)\|_V^2 dr \right) ds.$$

**Remarque 6.6.** Notons que, si  $\varepsilon$  est suffisamment petit,  $c_2 - (\lambda c_3 + 4 + 2T^2)\varepsilon > 0$

Nous utilisons (2.8) et désignons par  $\alpha$

$$(6.56) \quad \alpha = \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^h\|_H \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}^h(0)\|_H + \|\ddot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}^h\|_{\mathcal{V}^*}^2 + \|\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}^h\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 \\ + \|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}_\tau^h\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^d))} + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^h\|_H^2 + \max_{t \in (0,T)} \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v}^h(t)\|_V^2.$$

Maintenant, soit  $y$  la fonction définie par

$$(6.57) \quad y(t) = \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \dot{\mathbf{u}}^h(t)\|_H^2 + \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}(s) - \dot{\mathbf{u}}^h(s)\|_V^2 ds.$$

La réécriture de (6.55) conduit à l'inégalité suivante :

$$(6.58) \quad y(t) \leq C\alpha + C \int_0^t y(s) ds.$$

En ayant recours au Lemme 2.18, nous obtenons

$$(6.59) \quad y(t) \leq C\alpha e^{CT}.$$

Dans la mesure où  $t \in [0, T]$  est arbitraire

$$(6.60) \quad \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{C(0,T;H)}^2 + \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{\mathcal{V}}^2 \leq C\alpha.$$

De plus, pour tout  $t \in (0, T)$ ,

$$(6.61) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C(0,T;V)}^2 \leq 2\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + 2T\|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{\mathcal{V}}^2 \leq C\alpha.$$

En combinant (6.60) et (6.61), nous obtenons alors pour le problème semi-discret l'estimation suivante

$$(6.62) \quad \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{C(0,T;H)}^2 + \|\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^h\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C(0,T;V)}^2 \\ \leq C(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^h\|_H \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}^h(0)\|_H + \|\ddot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}^h\|_{\mathcal{V}^*}^2 + \|\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}^h\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 \\ + \|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}_\tau^h\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^d))} + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^h\|_H^2 + \max_{t \in (0,T)} \|\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v}^h(t)\|_V^2).$$

□

### 6.3 Approximations spatiale et temporelle, estimation de l'erreur

A présent, nous introduisons une approximation discrète en temps et en espace du Problème  $\mathcal{P}_V$  afin de borner l'erreur des solutions discrètes. La discrétisation en espace est identique à celle de la section 6.2. Pour ce faire, sur un intervalle de temps fini  $[0, T]$  où  $T > 0$  est donné, nous considérons un entier positif  $N$  et nous définissons la taille du pas de temps  $k = T/N$  ainsi que les instants  $t_n = nk$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Dans ce qui suit, afin d'alléger quelque peu les notations, nous désignons par  $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}(t_n)$ ,  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_n)$ . Pour une suite  $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N$ , nous utilisons la notation  $\delta_n \mathbf{u}_n^{hk} = (\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_{n-1}^{hk})/k$ ,  $n = 1, \dots, N$ , pour les différences divisées arrière, ainsi que la notation additionnelle  $\delta \mathbf{u}^{hk} = \{\delta_n \mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=1}^N$ . Une fois encore, la constante désignée par  $C$  peut différer d'une ligne à l'autre. L'approximation discrète du Problème  $\mathcal{P}_V$  est la suivante :

**Problème  $\mathcal{P}_V^{hk}$**  Trouver un champ de vitesse discret  $\{\mathbf{w}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$  et une densité de frottement discret  $\{\boldsymbol{\xi}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)$  tels que

$$(6.63) \quad \begin{aligned} & \langle \rho \delta \mathbf{w}_n^{hk} + A \mathbf{w}_n^{hk} + B \mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h \rangle_{V^* \times V} + (p(u_{n\nu}^{hk}), v_\nu^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \\ & + (p(u_{n\nu}^{hk}) \boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{v}_\tau^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} = 0 \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h, \end{aligned}$$

avec

$$(6.64) \quad \boldsymbol{\xi}_n^{hk} \in S_{\partial j(\mathbf{w}_{n\tau}^{hk})}^2 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \quad n = 1, \dots, N, \quad T = Nk,$$

et

$$(6.65) \quad \mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_0^h, \quad \mathbf{w}_0^{hk} = \mathbf{u}_1^h.$$

Nous considérons le déplacement discret suivant

$$(6.66) \quad \mathbf{u}_n^{hk} = \mathbf{u}_0^{hk} + \sum_{j=1}^n k \mathbf{w}_j^{hk}.$$

Dans ce qui suit, nous cherchons à analyser l'erreur entre la solution en déplacement du Problème  $\mathcal{P}_V$  et son approximation  $\mathcal{P}_V^{hk}$ . De la même manière que pour le cas semi-discret, l'erreur en contrainte reste un problème ouvert. Le résultat principal de la section est résumé dans le théorème suivant.

**Théorème 6.7.** *Sous les hypothèses (6.9)–(6.14), avec les régularités  $\mathbf{u} \in C^1(0, T; [H^2(\Omega)]^d) \cap H^3(0, T; H)$  et  $\dot{\mathbf{u}}_\tau \in C(0, T; H^2(\Gamma_3)^d)$ , et si  $k$  est suffisamment*

petit, nous avons l'estimation d'erreur optimale suivante

$$\max_{1 \leq n \leq N} (\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H) \leq C(h + k),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$  et  $k$ .

**Démonstration.** Nous prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^h$  dans (6.23) et nous la combinons avec (6.63) afin d'obtenir :

$$(6.67) \quad \langle \rho(\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}) + A(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}) + B(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \mathbf{v}^h \rangle_{V^* \times V} \\ + (p(u_{n\nu}) - p(u_{n\nu}^{hk}), v_\nu^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} + (p(u_{n\nu})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{v}_\tau^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} = 0.$$

A présent, en prenant  $\mathbf{v}^h = \mathbf{w}_n^{hk}$  dans (6.67) et en combinant ces 2 inegalités, nous obtenons

$$(6.68) \quad \langle \rho(\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}) + A(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}) + B(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \mathbf{v}^h \rangle_{V^* \times V} \\ + (p(u_{n\nu}) - p(u_{n\nu}^{hk}), v_\nu^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} + (p(u_{n\nu})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{v}_\tau^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\ = \langle \rho(\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}) + A(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}) + B(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \mathbf{w}_n^{hk} \rangle_{V^* \times V} \\ + (p(u_{n\nu}) - p(u_{n\nu}^{hk}), w_{n\nu}^{hk})_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} + (p(u_{n\nu})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{w}_{n\tau}^{hk})_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}.$$

Après avoir reformulé (6.68) de la manière suivante  $(\cdot, \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}) = (\cdot, \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)$ , nous avons

$$(6.69) \quad \langle \rho(\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}) + A(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}) + B(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk} \rangle_{V^* \times V} \\ + (p(u_{n\nu}) - p(u_{n\nu}^{hk}), w_{n\nu} - w_{n\nu}^{hk})_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} + (p(u_{n\nu})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{w}_{n\tau}^{hk})_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\ = \langle \rho(\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}) + A(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}) + B(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h \rangle_{V^* \times V} \\ + (p(u_{n\nu}) - p(u_{n\nu}^{hk}), w_{n\nu} - v_\nu^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} + (p(u_{n\nu})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{v}_\tau^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}.$$

De là, nous en déduisons que

$$(6.70) \quad \langle \rho(\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}) + A(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}) + B(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk} \rangle_{V^* \times V} \\ + (p(u_{n\nu}) - p(u_{n\nu}^{hk}), w_{n\nu} - w_{n\nu}^{hk})_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} + (p(u_{n\nu})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{w}_{n\tau}^{hk})_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\ + (p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{w}_{n\tau}^{hk})_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} = \\ \langle \rho(\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}) + A(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}) + B(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h \rangle_{V^* \times V} \\ + (p(u_{n\nu}) - p(u_{n\nu}^{hk}), w_{n\nu} - v_\nu^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} + (p(u_{n\nu})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{v}_\tau^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}.$$

Par conséquent, après quelques manipulations élémentaires, il vient que

$$\begin{aligned}
 (6.71) \quad & (\rho(\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk})_H + \langle A(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk} \rangle_{V^* \times V} \\
 & (p(u_{n\nu}^{hk}) \boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk}) \boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{w}_{n\tau}^{hk})_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} = \\
 & (\rho(\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n), \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{w}_n)_H + (\rho(\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)_H \\
 & (\rho(\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n), \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)_H + \langle A(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h \rangle_{V^* \times V} \\
 & + \langle B(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), (\mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{w}_n) + (\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h) \rangle_{V^* \times V} \\
 & + (p(u_{n\nu}) - p(u_{n\nu}^{hk}), (w_{n\nu}^{hk} - w_{n\nu}) + (w_{n\nu} - v_\nu^h))_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \\
 & + (p(u_{n\nu}) \boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk}) \boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{v}_\tau^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\
 & + (p(u_{n\nu}^{hk}) \boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}) \boldsymbol{\xi}_n, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{w}_{n\tau}^{hk})_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}.
 \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que

$$(6.72) \quad 2(a - b, a) = \|a - b\|^2 + \|a\|^2 - \|b\|^2.$$

De là, en prenant  $a = \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}$  et  $b = \mathbf{w}_{n-1} - \mathbf{w}_{n-1}^{hk}$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 (6.73) \quad & \frac{\rho}{2k} (\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2 - \|\mathbf{w}_{n-1} - \mathbf{w}_{n-1}^{hk}\|_H^2) \\
 & \leq \rho((\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk})_H.
 \end{aligned}$$

L'opérateur  $A$  est coercif et de Lipschitz, d'après (6.20), d'où :

$$(6.74) \quad c_2 \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V^2 \leq \langle A(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk} \rangle_{V^* \times V}.$$

$$(6.75) \quad \langle A(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h \rangle_{V^* \times V} \leq L_C \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V.$$

L'opérateur  $B$  est également de Lipschitz, d'après (6.21) :

$$(6.76) \quad \langle B(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}), \mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h \rangle_{V^* \times V} \leq L_E \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h\|_V.$$

Avec (2.4) et (6.11)(a) nous avons :

$$\begin{aligned}
 (6.77) \quad & (p(u_{n\nu}) - p(u_{n\nu}^{hk}), w_{n\nu}^{hk} - v_\nu^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R})} \leq c_0^2 L_p \|u_{n\nu} - u_{n\nu}^{hk}\|_V \|w_{n\nu}^{hk} - v_\nu^h\|_V \\
 & \leq c_0^2 L_p \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{w}_n^{hk} - \mathbf{v}^h\|_V.
 \end{aligned}$$

En ayant recours à (2.4), (6.11)(b) et (6.22)(b), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (6.78) \quad & (p(u_{n\nu}^{hk}) \boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk}) \boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{w}_{n\tau}^{hk})_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \geq -\lambda c_3 \|\mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{w}_{n\tau}^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^2 \\
 & \geq -\lambda c_3 (\varepsilon \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V^2 + C(\varepsilon) \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2).
 \end{aligned}$$

En utilisant à présent (2.4), (6.11)(a), (6.11)(b) et (6.22)(a), nous avons :

$$\begin{aligned}
 (6.79) \quad & (p(u_{n\nu})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{v}_\tau^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\
 & \leq (p(u_{n\nu})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n + p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n^{hk}, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{v}_\tau^h)_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\
 & \leq c_0^2 L_p c \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{v}_\tau^h\|_V + 2c_3 c \|\mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{v}_\tau^h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}
 \end{aligned}$$

Et, de même, nous en déduisons que

$$(6.80) \quad (p(u_{n\nu}^{hk})\boldsymbol{\xi}_n - p(u_{n\nu})\boldsymbol{\xi}_n, \mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{w}_{n\tau}^{hk})_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \leq c_0^2 L_p c \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{w}_{n\tau}^{hk}\|_V.$$

Ainsi, en combinant (6.73)–(6.80), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (6.81) \quad & \frac{\rho}{2k} (\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2 - \|\mathbf{w}_{n-1} - \mathbf{w}_{n-1}^{hk}\|_H^2) + (c_2 - \lambda c_3 \varepsilon) \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V^2 \leq \\
 & (\rho(\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)_H + \rho \|\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n\|_H (\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_H) \\
 & + L_C \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V + L_E \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V (\|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V) \\
 & + c_0^2 L_p \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V (\|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V) + 2c_3 c \|\mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{v}_\tau^h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\
 & + c_0 L_p c \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V (\|\mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{v}_\tau^h\|_V + \|\mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{w}_{n\tau}^{hk}\|_V) \\
 & + \lambda c_3 C(\varepsilon) \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2.
 \end{aligned}$$

Par suite, à l'aide de (2.4), (2.8), des inégalités  $ab \leq 2a^2 + 2b^2$ ,  $ab \leq \varepsilon a^2 + b^2/4\varepsilon$  et (6.81), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 (6.82) \quad & \frac{\rho}{2k} (\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2 - \|\mathbf{w}_{n-1} - \mathbf{w}_{n-1}^{hk}\|_H^2) + (c_2 - \lambda c_3 \varepsilon) \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V^2 \leq \\
 & (\rho(\delta \mathbf{w}_n - \delta \mathbf{w}_n^{hk}), \mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h)_H + C (\|\dot{\mathbf{w}}_n - \delta \mathbf{w}_n\|_H^2 + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^h\|_V^2) \\
 & + \varepsilon \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_V^2 + C \|\mathbf{w}_{n\tau} - \mathbf{v}_\tau^h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + C(\varepsilon) \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2.
 \end{aligned}$$

**Remarque 6.8.** Notons que, si  $\varepsilon$  est suffisamment petit,  $c_2 - (\lambda c_3 + 1)\varepsilon > 0$ .

A présent, nous remplaçons  $n$  par  $j$  et effectuons la somme sur  $j$  allant de 1 à  $n$  pour obtenir

$$\begin{aligned}
 (6.83) \quad & (\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2 - \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^{hk}\|_H^2) + \frac{2}{\rho} (c_2 - (\lambda c_3 + 1)\varepsilon) \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_V^2 \\
 & \leq 2 \sum_{j=1}^n k ((\delta \mathbf{w}_j - \delta \mathbf{w}_j^{hk}), \mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h)_H + C \sum_{j=1}^n k (\|\dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j\|_H^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_V^2 \\
 & + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h\|_V^2) + C \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{w}_{j\tau} - \mathbf{v}_{j\tau}^h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + C(\varepsilon) \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_H^2.
 \end{aligned}$$

Nous considérons le terme  $\sum_{j=1}^n k((\delta \mathbf{w}_j - \delta \mathbf{w}_j^{hk}), \mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h)_H$ ; nous avons

$$\begin{aligned}
 (6.84) \quad & \sum_{j=1}^n k((\delta \mathbf{w}_j - \delta \mathbf{w}_j^{hk}), \mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h)_H \\
 &= \sum_{j=1}^n ((\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}) - (\mathbf{w}_{j-1} - \mathbf{w}_{j-1}^{hk}), \mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h)_H \\
 &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}), \mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h)_H - \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}), \mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)_H \\
 &\leq \varepsilon' \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2 + C \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n^h\|_H^2 + C \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^{hk}\|_H^2 + C \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1^h\|_H^2 \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_H \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_H \\
 &\leq \varepsilon' \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2 + C \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n^h\|_H^2 + C \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^{hk}\|_H^2 + C \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1^h\|_H^2 \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k}{4} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_H^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{k} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_H^2,
 \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon' < \frac{1}{2}$ .

A présent, en utilisant l'inégalité classique, nous obtenons

$$(6.85) \quad \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_V \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V + \sum_{p=1}^j k \|\mathbf{w}_p - \mathbf{w}_p^{hk}\|_V + I_j$$

où  $I_j$  est définie par la relation suivante

$$\begin{aligned}
 (6.86) \quad I_j &= \left\| \int_0^{t_j} \mathbf{w}(s) ds - \sum_{p=1}^j k \mathbf{w}_p \right\|_V \\
 &\leq k \|\mathbf{u}\|_{H^2(0,T;V)}.
 \end{aligned}$$



Ainsi, puisque  $2ab \leq a^2 + b^2$

$$\begin{aligned}
 (6.87) \quad & \| \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk} \|_V^2 \leq \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h \|_V^2 + \left( \sum_{p=1}^j k \| \mathbf{w}_p - \mathbf{w}_p^{hk} \|_V \right)^2 + k^2 \| \mathbf{u} \|_{H^2(0,T;V)}^2 \\
 & + 2 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h \|_V \sum_{p=1}^j k \| \mathbf{w}_p - \mathbf{w}_p^{hk} \|_V + 2 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h \|_V k \| \mathbf{u} \|_{H^2(0,T;V)} \\
 & + 2 \sum_{p=1}^j k \| \mathbf{w}_p - \mathbf{w}_p^{hk} \|_V k \| \mathbf{u} \|_{H^2(0,T;V)} \\
 & \leq 3 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h \|_V^2 + 3 \left( \sum_{p=1}^j k \| \mathbf{w}_p - \mathbf{w}_p^{hk} \|_V \right)^2 + 3k^2 \| \mathbf{u} \|_{H^2(0,T;V)}^2 \\
 & \leq C \left( \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h \|_V^2 + j \sum_{p=1}^j k^2 \| \mathbf{w}_p - \mathbf{w}_p^{hk} \|_V^2 + k^2 \| \mathbf{u} \|_{H^2(0,T;V)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sum_{j=1}^n k \| \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk} \|_V^2 \leq CT \left( \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h \|_V^2 + \sum_{j=1}^n k^2 \sum_{p=1}^j \| \mathbf{w}_p - \mathbf{w}_p^{hk} \|_V^2 + k^2 \| \mathbf{u} \|_{H^2(0,T;V)}^2 \right).$$

Soient

$$e_n = \| \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk} \|_H^2 + \sum_{j=1}^n k \| \mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk} \|_V^2$$

et

$$\begin{aligned}
 g_n &= \sum_{j=1}^n k (\| \dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j \|_H^2 + \| \mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h \|_V^2) \\
 &+ \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^{hk} \|_V^2 + k^2 \| \mathbf{u} \|_{H^2(0,T;V)}^2 + \| \mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n^h \|_H^2 + \| \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^{hk} \|_H^2 + \| \mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1^h \|_H^2 \\
 &+ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{k} \| \mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h) \|_H^2 + C \sum_{j=1}^n k \| \mathbf{w}_{j\tau} - \mathbf{v}_{j\tau}^h \|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}.
 \end{aligned}$$

De là, nous pouvons reformuler (6.83) comme suit

$$(6.88) \quad e_n \leq C g_n + \sum_{j=1}^n k e_j, \quad \text{pour } n = 1, \dots, N.$$

Considérons (6.88) et appliquons la forme discrète du Lemme de Gronwall 2.19 pour obtenir que

$$\begin{aligned}
 (6.89) \quad & \max_{1 \leq n \leq N} (\|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^{hk}\|_H^2 + \sum_{j=1}^n k \|\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_j^{hk}\|_V^2) \\
 & \leq C \left[ \sum_{j=1}^N k (\|\dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j\|_H^2 + \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h\|_V^2 + \|\mathbf{w}_{j\tau} - \mathbf{v}_{j\tau}^h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}) \right. \\
 & \quad + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + k^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(0,T;V)}^2 + \max_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n^h\|_H^2 + \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0^{hk}\|_H^2 + \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1^h\|_H^2 \\
 & \quad \left. + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{k} \|\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_H^2 \right].
 \end{aligned}$$

A présent, d'après la théorie classique de l'interpolation par élément fini, il découle de [43] que

$$\begin{aligned}
 k \sum_{j=1}^N \|\dot{\mathbf{w}}_j - \delta \mathbf{w}_j\|_H^2 & \leq ck^2 \|\mathbf{w}\|_{H^2(0,T;H)}^2, \\
 \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N-1} \|(\mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j^h) - (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)\|_H^2 & \leq ch^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(0,T;V)}^2,
 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Remarque 6.9.** Certaines régularités exigées dans le théorème 6.7 n'ont, à notre connaissance, aucune justification mécanique et ne sont introduites qu'à des fins purement mathématiques.

## 6.4 Simulations numériques

La méthode de résolution du problème  $\mathcal{P}_V$  fait appel à des outils similaire à ceux utilisés dans le Chapitre 4. Elle est basée sur une procédure itérative qui conduit à une suite de problèmes convexes. Pour chaque itération de "convexification", le coefficient de frottement  $\mu(\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|)$  est fixé à une valeur donnée qui dépend de la vitesse tangentielle associée à la solution  $\mathbf{u}_\tau$  trouvée dans l'itération précédente. Par ailleurs, et pour rappel, les conditions de contact avec frottement sont traitées en utilisant une approche numérique basée sur la combinaison d'une méthode de pénalisation, pour traiter les conditions de compliance normale, et de la méthode du Lagrangien augmenté pour le frottement. De ce fait, nous considérons des noeuds supplémentaires, ici fictifs, pour

les multiplicateurs de Lagrange dans le maillage initial.

**Exemple numérique.** Nous considérons la configuration physique décrite dans la Figure 6.1 . Le domaine  $\Omega$  représente la coupe transversale d'un corps soumis à l'action de forces de traction de manière à ce que l'hypothèse des contraintes planes soit valide. Sur la partie  $\Gamma_1$ , le corps est fixé, d'où un déplacement nul sur cette zone. La frontière  $\Gamma_2$  subit des forces verticales de traction de densité  $\mathbf{f}_2$ , fonction de la position et du temps afin de modéliser l'action d'une masse se déplaçant le long du corps  $\Omega$ . Nous supposons également qu'aucune force volumique n'agit sur  $\Omega$  lors du processus dynamique. Le corps est en contact frottant contre une fondation sur la frontière  $\Gamma_3$ . Cet exemple numérique est sensé modéliser grossièrement l'action d'une roue (masse) de train se déplaçant le long d'un rail (corps  $\Omega$ ) reposant sur un ballast (fondation déformable).

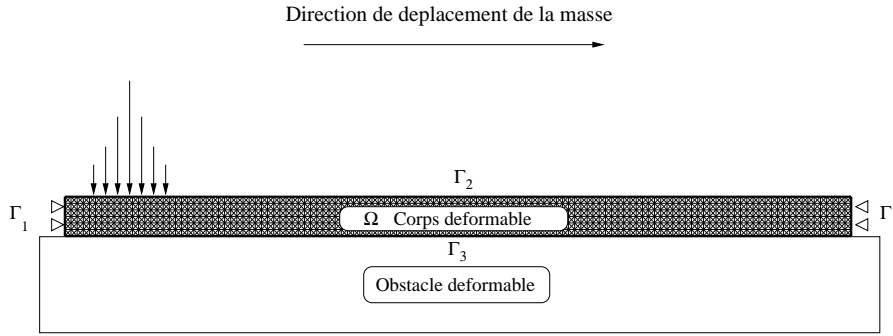


FIGURE 6.1 : Configuration de référence d'un corps bi-dimensionnel.

Dans la mesure où la viscosité peut être supposée aussi petite que nous le souhaitons, et comme il ne s'agit pas de l'objet d'étude, nous allons la négliger dans la suite. Le comportement du matériau est alors modélisé par une loi constitutive linéaire élastique dans laquelle le tenseur d'élasticité  $\mathcal{E}$  est donné par

$$(\mathcal{E}\boldsymbol{\tau})_{\alpha\beta} = \frac{E\kappa}{(1+\kappa)(1-2\kappa)}(\tau_{11} + \tau_{22})\delta_{\alpha\beta} + \frac{E}{1+\kappa}\tau_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^2.$$

Ici,  $E$  et  $\kappa$  désignent respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau, et  $\delta_{\alpha\beta}$  désigne le symbole de Kronecker. La fonction  $p$  utilisée ici est définie par

$$p(r) = \min(c_\nu[r]_+, c_3),$$

avec  $c_3$  très grand. En pratique, la fonction  $p$  est donc traitée comme une loi de compliance normale classique. Pour le coefficient de frottement, nous choisissons d'utiliser une expression similaire à celle employée au Chapitre 4, à savoir  $\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$(6.90) \quad \mu(\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|) = (a - b) \cdot e^{-\alpha\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} + b,$$

avec  $a, b, \alpha > 0$  et  $a \geq b$ . Le coefficient de frottement dépend de la vitesse tangentielle et non plus du déplacement, comme précédemment.

En outre, afin de modéliser le déplacement d'une masse le long de la frontière  $\Gamma_2$ , nous considérons la fonction suivante pour  $\mathbf{f}_2$ , avec  $x$ , l'abscisse d'un point de la frontière

$$(6.91) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}_2(x, t) &= (0, -g(x, t)) \\ g(x, t) &= F e^{-\psi(x - c_{masse}t)^2}, \forall x \in [0, L] \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

où  $F, \psi, c_{masse} > 0$ .

Le choix d'une telle fonction est motivé par un certains nombres de points que nous nous efforcerons de mettre en évidence au cours des simulations numériques.

Pour le calcul ci dessous, nous utilisons les données suivantes :

$$\begin{aligned} T &= 1s, \\ L &= 2m, \quad l = 0.1m, \\ \mathbf{u}_0 &= 0m, \quad \mathbf{u}_1 = 0m/s, \quad \rho = 1000kg/m^3, \quad E = 100GPa, \quad \kappa = 0.3, \\ \mathbf{f}_0 &= (0, 0)GPa, \quad F = 10GPa.m, \quad \Psi = 50m^{-1}, \quad c_{masse} = 2m/s, \\ c_3 &= 10^8GPa.m, \quad c_\nu = 10GPa, \quad a = 1, \quad b = 0.5, \quad \alpha = 2000. \end{aligned}$$

Dans la Figure 6.2 nous représentons la configuration déformée du corps  $\Omega$  à plusieurs instants ( $t = 0.2, 0.4, 0.6$  et  $0.8s$ ) ainsi que les forces de contact agissant sur la frontière  $\Gamma_3$ . Nous constatons qu'à un instant donné  $t = t_0$ , des forces de contact d'intensité significative n'existent que sur une portion de la frontière de contact et finiront par disparaître au cours du temps, ce qui est cohérent avec le déplacement d'une masse le long de  $\Gamma_2$ . En outre, la vitesse de déplacement de la masse est assimilable au coefficient  $c_{masse}$  ; dans le cas présent nous avons choisi  $c_{masse} = \frac{L}{T}$ . En  $T$  secondes, la masse a donc parcouru toute la longueur de  $\Gamma_2$  en se déplaçant de gauche à droite.

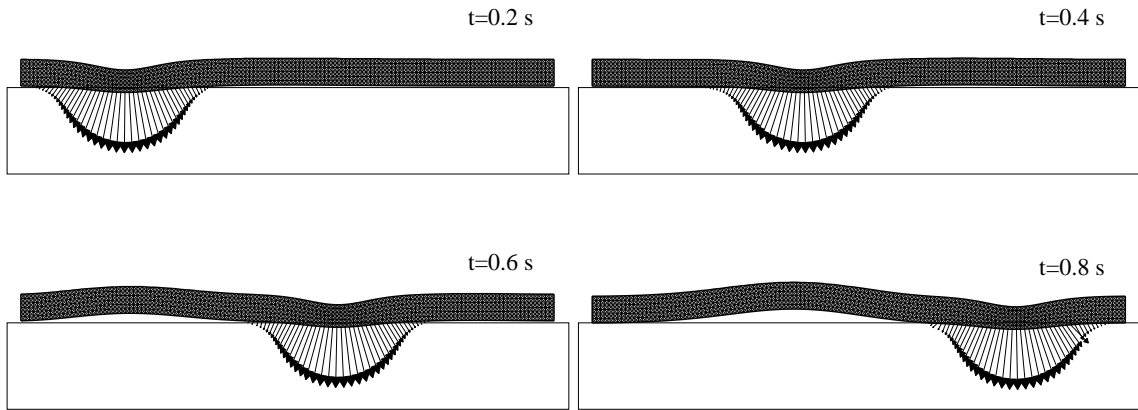


FIGURE 6.2 : Maillages déformés et forces de contact sur  $\Gamma_3$  en fonction du pas de temps.

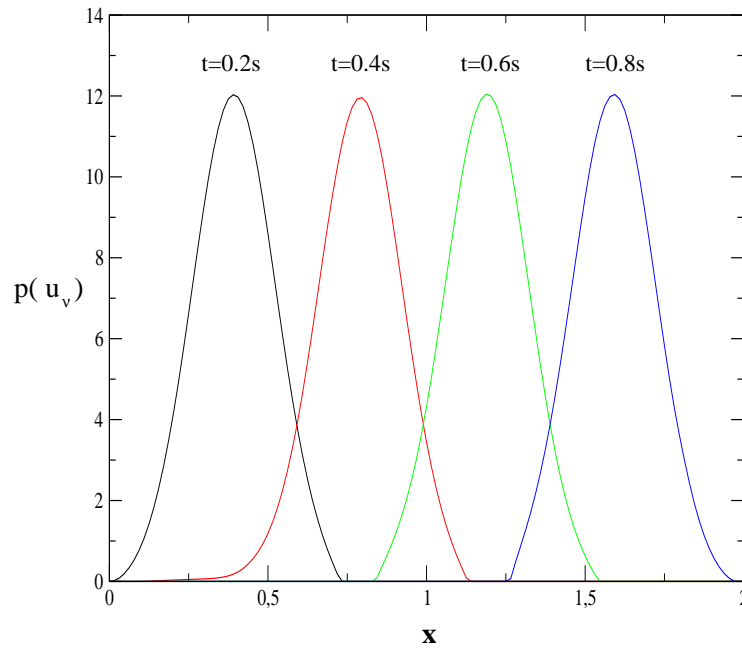


FIGURE 6.3 : Forces normales sur  $\Gamma_3$  en fonction du pas de temps.

En complément des observations précédentes, nous représentons dans la Figure 6.3 la force normale sur les noeuds en contact au cours du temps correspondant

aux maillages déformés de la Figure 6.2 . Nous retrouvons, pour les 4 courbes, la forme caractéristique de courbe en cloche qui n'est pas sans rappeler les fonctions Gaussiennes, soit justement le type de fonction utilisé pour la condition de Neumann.

Nous nous proposons à présent d'étudier dans la Figure 6.4 l'influence du paramètre supplémentaire  $\Psi$ . A l'instant  $t_0$ , du point de vue de la fonction définie en (6.91), la valeur de ce paramètre influe sur la "vitesse" de décroissance de  $g$  à mesure que l'on s'éloigne du point d'abscisse  $x = ct_0$ . Autrement dit, plus  $\Psi$  est grand plus  $g$  va tendre vers 0 rapidement. D'un point de vue un peu plus appliqué, nous pouvons l'associer à la longueur de la masse : plus la masse est longue, plus  $\psi$  sera petit. Il s'agit bien du comportement que l'on souhaite observer.

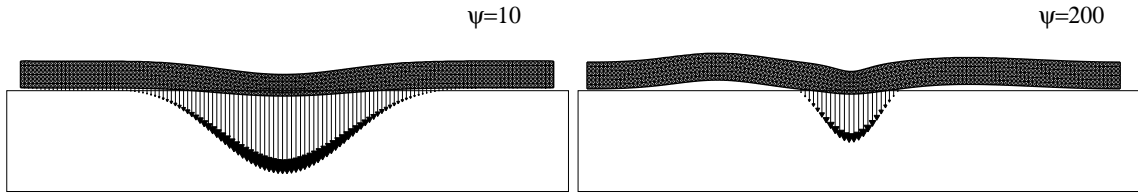


FIGURE 6.4 : Maillages déformés et forces de contact sur  $\Gamma_3$  pour  $\Psi = 10$  et  $\Psi = 200$  dans le cas sans frottement.

**Estimations de l'erreur.** Afin de vérifier la convergence du schéma discret et d'illustrer l'estimation de l'erreur optimale obtenue dans la Section 6.3, nous calculons une suite de solutions numériques en utilisant des triangularisations uniformes du domaine selon le paramètre de discrétisation spatiale  $h$  et une discrétisation uniforme du temps selon le pas de temps  $k$ . Les valeurs de l'estimation de l'erreur numérique  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{hk}\|_V$ , désignées par  $E^{hk}$  dans la Figure 6.5 , sont calculées pour plusieurs valeurs des paramètres de discrétisation spatiale et temporelle,  $h$  et  $k$ . Ici, la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est divisée en  $1/h$  parties égales. Nous commençons avec  $h = 1/2$  et  $k = 1/2$  puis procédons par des divisions successives par deux. La solution numérique correspondant à  $h = 1/256$  et  $k = 1/256$  est considérée comme étant la solution "exacte" et prend 16797 temps CPU (exprimé en secondes) ; elle sert de référence pour définir les erreurs de la solution numérique pour d'autres valeurs de  $h$  et  $k$ . Cette discrétisation correspond à un problème comportant 132610 degrés de liberté. Les résultats numériques sont présentés dans la Figure 6.5 où est tracée l'estimation de l'erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{hk}\|_V$  en fonction de  $h$  et  $k$  . Notons que ces résultats valident l'estimation optimale théorique obtenue dans la Section 6.3 à savoir le comportement linéairement asymptotique de l'erreur de discrétisation.

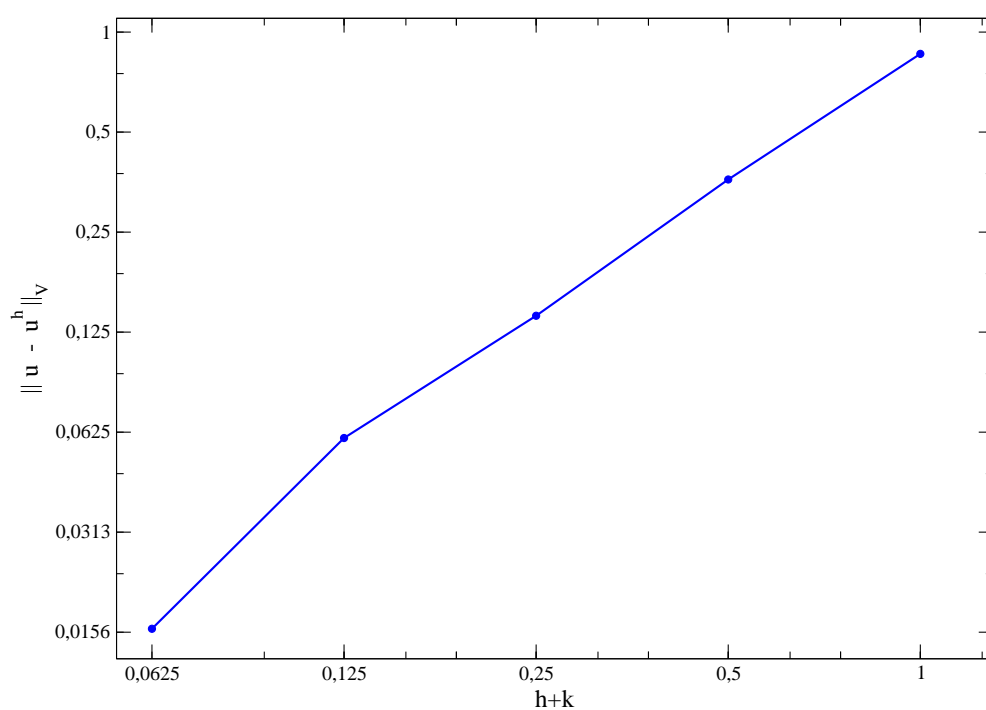


FIGURE 6.5 : Estimation de l'erreur numérique.

## Troisième partie

# Modélisation numérique de quelques problèmes de contact en hyperélasticité





## Partie III

# Modélisation numérique de quelques problèmes de contact en hyperélasticité

La partie qui va suivre nous oblige à considérer un formalisme assez différent de celui utilisé dans la partie précédente, et déjà abordé dans la section 1.5, à savoir le cadre des grandes déformations. Si la partie II était consacrée aux résultats d'existence mathématiques et de convergence en petites déformations, la partie III est plutôt tournée du côté de la modélisation et des méthodes numériques, compte tenu du peu de résultats à notre disposition en grandes déformations. Nous allons nous intéresser à deux types de problématiques. La première concerne le développement et l'analyse d'une méthode numérique de type active set avec projection qui représente une alternative à la méthode du Lagrangien augmenté pour la résolution d'un problème statique avec contrainte unilatérale. Puis, dans un second temps, nos préoccupations vont se tourner vers l'établissement d'une méthode numérique possédant de bonnes propriétés de type conservation de l'énergie pour la résolution d'un problème dynamique avec compliance normale, contrainte unilatérale et frottement. Cette partie est divisée en deux Chapitres de cinq sections chacun. Dans le Chapitre 7, après une présentation du modèle, de la formulation et de l'approximation variationnelle, nous présentons et analysons deux schémas numériques de type "active set" pour la résolution des problèmes de contact étudiés. L'accent est mis sur les performances des méthodes numériques de type "active set" sur deux modèles mécaniques en petites et grandes déformations par rapport à la méthode du Lagrangien augmenté. Enfin, dans le Chapitre 8, nous présentons une méthode numérique de conservation de l'énergie ainsi qu'une comparaison avec d'autres méthodes existantes du même type pour la résolution d'un problème hyperélastique en grandes déformations.



## Chapitre 7

# Une méthode de projection de type active set pour un problème statique avec contrainte unilatérale

Dans ce Chapitre, nous considérons deux méthodes de type "active set" afin de résoudre un problème de contact sans frottement entre un corps déformable hyperélastique et un obstacle parfaitement rigide, i.e. le problème de Signorini. Les méthodes étudiées sont la "Primal dual active set" ([69, 71]), déjà introduite dans la section 3.2, et la méthode de projection itérative, présentée ci-après, méthode jusqu'alors utilisée dans [144] pour la résolution du problème de Signorini pour les équations de Laplace. Il s'agit de comparer les résultats obtenus par ces méthodes avec ceux obtenus via la méthode du Lagrangien augmenté ([6, 88, 143]), présentés en sous-section 3.1.1, en considérant deux problèmes de contact de type benchmark, en l'occurrence l'un en petites déformations et l'autre en grandes déformations. Après avoir présenté succinctement le problème, dans la première section, nous rappelons sa formulation variationnelle et un résultat d'existence en grandes déformations. Ensuite, la section 2 est dédiée à l'approximation du problème variationnel ainsi qu'à la présentation de la méthode de projection itérative visant à résoudre le problème considéré. Nous continuons, dans la section 3, par l'établissement d'un résultat de convergence de l'algorithme de projection itérative en petites déformations, résultat basé sur les propriétés de l'opérateur élastique et de l'opérateur de projection. La section 4 est consacrée à la présentation des simulations numériques afin d'illustrer et de comparer le comportement des méthodes "active set" par rapport à la méthode du Lagrangien augmenté. Enfin, nous rappelons les résultats obtenus ainsi que les perspectives éventuelles dans la section 5. Ce Chapitre a fait l'objet de l'article [1] et la méthode numérique employée présente

des similitudes avec celle utilisée dans [2] en thermique.

## 7.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

### Modèle

La formulation forte du problème de contact hyperélastique s'écrit :

**Problem  $\mathcal{P}$ .** *Trouver un champ de déplacement  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de contraintes  $\mathbf{\Pi} : \Omega \rightarrow \mathbb{M}^d$  tels que*

$$(7.1) \quad \mathbf{\Pi} = \partial_{\mathbf{F}} W(\mathbf{F}(\mathbf{u})) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(7.2) \quad \text{Div } \mathbf{\Pi} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(7.3) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$

$$(7.4) \quad \mathbf{\Pi} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2,$$

$$(7.5) \quad u_\nu \leq 0, \quad \Pi_\nu \leq 0, \quad u_\nu \Pi_\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3,$$

$$(7.6) \quad \mathbf{\Pi}_\tau = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3.$$

L'équation (7.1) représente la loi constitutive hyperélastique du matériau, précédemment introduite dans la section 1.5. L'équation (7.2) est l'équation d'équilibre exprimée dans le cas d'un processus statique. Les conditions (7.3) et (7.4) désignent respectivement les conditions aux limites en déplacement et en contrainte. Enfin, les conditions (7.5) et (7.6) caractérisent les conditions de contrainte unilatérale sans frottement, déjà abordées dans (1.19). Un tel problème figure dans la littérature sous le nom de Problème de Signorini. Notons que la condition (7.5) peut également s'écrire sous la forme d'une inclusion sous-différentielle

$$(7.7) \quad -\Pi_\nu \in \partial \Psi_{\mathbb{R}^-}(u_\nu),$$

déjà employée dans (1.20).

### Formulation variationnelle

La solution faible du problème  $\mathcal{P}$  peut être définie à partir d'une inégalité variationnelle [70, 82], ou peut être obtenue de manière équivalente à partir d'un problème de minimisation sur un ensemble convexe, voir [33, 58] et section 1.5. Ici, nous considérons une formulation variationnelle hybride comprenant une formulation basée sur un

point-selle. De ce fait, le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_\nu$  en relation avec la contrainte de contact vérifie une inclusion sous-différentielle étendue découlant de l'inclusion sous-différentielle définie en (7.7). Notons que, par commodité, le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_\nu$  est assimilé à  $-\Pi_\nu$ . Par conséquent, la condition d'inclusion ponctuelle (7.7) conduit à l'inclusion sous-différentielle

$$(7.8) \quad \lambda_\nu \in \partial\varphi_\nu(u_\nu) \quad \text{dans} \quad Y_\nu,$$

où  $\varphi_\nu$  désigne la fonction introduite dans (1.85) et  $Y_\nu$  est l'espace de fonction introduit dans la section 1.5. Par ailleurs, afin d'étudier le problème mécanique (7.1)–(7.6) nous supposons la régularité suivante pour les densités de forces volumiques et surfaciques

$$(7.9) \quad \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d.$$

Maintenant, nous nous attaquons à la formulation variationnelle hybride du Problème  $\mathcal{P}$ . Pour ce faire, nous rappelons que l'opérateur hyperélastique non linéaire  $A : V \rightarrow V^*$ , et l'élément  $\mathbf{f}$  sont définis par

$$(7.10) \quad \langle A(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} = \int_{\Omega} \mathbf{\Pi} : \nabla \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(7.11) \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{v})_H + (\mathbf{f}_2, \mathbf{v})_{L^2(\Gamma_2)}, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

La formule de Green (1.82) et les définitions (7.10) et (7.11) permettent de constater que

$$\langle A(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} + \int_{\Gamma_3} \Pi_\nu v_\nu \, da + \int_{\Gamma_3} \mathbf{\Pi}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau \, da.$$

Ensuite, en utilisant le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_\nu$ , associé à la contrainte normale de contact  $\Pi_\nu$ , ainsi que la condition (7.6), nous obtenons la formulation variationnelle du problème de contact sans frottement  $\mathcal{P}$  en terme de deux champs inconnus.

**Problème  $\mathcal{P}_V$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u}$  et un champ de contrainte normal  $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_\nu \boldsymbol{\nu}$  tels que*

$$(7.12) \quad \mathbf{u} \in V, \quad \langle A(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} + \langle \lambda_\nu, v_\nu \rangle_{Y_\nu, X_\nu} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V^* \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(7.13) \quad \lambda_\nu \in \partial\varphi_\nu(u_\nu) \quad \text{dans} \quad Y_\nu.$$

Une paire  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  satisfaisant (7.12), (7.13) et la loi constitutive hyperélastique de la forme  $\mathbf{\Pi} = \partial_{\mathbf{F}} W(\mathbf{F})$  est appelée une *solution faible* du problème de contact sans frottement  $\mathcal{P}$ .

Un résultat concernant l'existence d'une solution dans le cas du problème de Signorini tridimensionnel en hyperélasticité peut être obtenu, à l'aide des travaux de [44, p.381]. Le problème  $\mathcal{P}_V$  peut d'ailleurs être facilement obtenu à partir du problème de minimisation, cf [13, 44, 96].

**Remarque 7.1.** Dans le cas de l'élasticité linéaire, si nous supposons que l'opérateur élastique est un opérateur fortement monotone de Lipschitz sur l'espace  $V$  (faux en hyperélasticité) alors, comme cela est montré dans [122], pour chaque  $f \in V$  il existe une unique solution au problème de contact  $\mathcal{P}_V$ .

## 7.2 Approximation variationnelle et schémas numériques

La section qui va suivre est consacrée à l'approximation variationnelle du Problème  $\mathcal{P}_V$  ainsi qu'à la présentation d'une méthode numérique de type "active set" avec projection pour résoudre le problème de contact unilatéral en hyperélasticité. Il s'agit, tout d'abord, de présenter la discrétisation du problème variationnel  $\mathcal{P}_V$  puis, la méthode de projection itérative qu'il faudra mettre en parallèle avec la méthode du Lagrangien augmenté présenté dans la sous-section 3.1.1, d'une part, et la méthode "Primal dual active set" en section 3.2, d'autre part, afin d'en tirer les différences et similitudes. Soit  $\Omega$  un domaine polyédrique ; choisissons une famille d'éléments finis réguliers constituant une partition de  $\overline{\Omega}$ . Elle est compatible avec la décomposition de la frontière  $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \overline{\Gamma}_3$ , i.e., si un côté de l'élément  $Tr \in \mathcal{T}^h$  a plus d'un point sur  $\Gamma$ , alors ce côté repose entièrement sur  $\overline{\Gamma}_1$ ,  $\overline{\Gamma}_2$  ou  $\overline{\Gamma}_3$ . L'espace  $V$  est approché par l'espace de dimension fini  $V^h \subset V$  des fonctions continues et affines par morceaux, à savoir,

$$V^h = \{ \mathbf{v}^h \in [C(\overline{\Omega})]^d : \mathbf{v}^h|_T \in [P_1(Tr)]^d \ \forall Tr \in \mathcal{T}^h, \\ \mathbf{v}^h = \mathbf{0} \text{ aux noeuds situés sur } \Gamma_1 \},$$

où  $P_1(Tr)$  représente l'espace des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à un dans  $Tr$  et  $h > 0$  désigne le paramètre de discrétisation spatiale. Pour la discrétisation de l'espace du multiplicateur de Lagrange  $Y_\nu$ , nous utilisons des fonctions constantes par morceaux, voir section 1.5 pour plus de détails. L'espace discret associé aux multiplicateurs de Lagrange est désigné par  $Y_\nu^h$ . Cela conduit au problème discret suivant pour le Problème  $\mathcal{P}_V$ .

**Problème  $\mathcal{P}_V^h$ .** Trouver un champ de déplacements discret  $\mathbf{u}^h$  et un champ de contrainte normale discret  $\boldsymbol{\lambda}^h = \lambda_\nu^h \boldsymbol{\nu}$  tels que

$$(7.14) \quad \mathbf{u}^h \in V^h, \quad \langle A(\mathbf{u}^h), \mathbf{v}^h \rangle_{V^* \times V} + \langle \lambda_\nu^h, v_\nu^h \rangle_{Y_\nu, X_\nu} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,$$

$$(7.15) \quad \lambda_\nu^h \in \partial \varphi_\nu(u_\nu^h) \quad \text{dans } Y_\nu^h.$$

Pour plus de détails concernant la discrétisation, le lecteur pourra se référer à [30, 31, 88, 143].

Partant de ce formalisme, un algorithme de projection itératif basé sur une méthode de point fixe est introduit. Notons que dans (3.20) nous avons recours à une reformulation des conditions de contrainte unilatérale à l'aide d'une fonction de complémentarité non linéaire. Afin d'obtenir l'équation de point fixe adéquate, cette fonction peut être utilisée de manière légèrement différente pour obtenir une autre formulation de (7.5), i.e. différente de celle utilisée dans la méthode "Primal dual active set" présentée dans la section 3.2. Soit  $c > 0$ , les conditions de Signorini (7.5) sont équivalentes au problème de point fixe :

$$(7.16) \quad u_\nu = -[-u_\nu + c\Pi_\nu]_+ \text{ sur } \Gamma_3.$$

Notons que l'équivalence entre (7.16) et (3.20) peut être aisément démontrée en utilisant des arguments similaires à ceux employés dans la section 3.2. C'est ce que nous nous proposons de faire dans la démonstration qui va suivre.

**Démonstration.** Seules deux configurations sont possibles pour le déplacement normal, d'après les conditions de Signorini (1.19) : soit  $u_\nu < 0$ , soit  $u_\nu = 0$ . Si  $u_\nu < 0$ , (1.19)(3) implique que  $\Pi_\nu = 0$ . Par suite

$$-[-u_\nu + c\Pi_\nu]_+ = -[-u_\nu]_+ = u_\nu.$$

Supposons à présent que  $u_\nu = 0$  et  $\Pi_\nu \leq 0$

$$-[-u_\nu + c\Pi_\nu]_+ = -[c\Pi_\nu]_+ = 0 = u_\nu,$$

soit exactement l'équation (7.16). Réciproquement, l'égalité (7.16) implique (1.19)(1). Ensuite, si  $u_\nu = 0$  nous avons

$$-[c\Pi_\nu]_+ = 0,$$

ce qui signifie que  $\Pi_\nu \leq 0$ . Enfin, si  $u_\nu < 0$ ,  $-u_\nu + c\Pi_\nu > 0$  et

$$u_\nu = -[-u_\nu + c\Pi_\nu]_+ = u_\nu - c\Pi_\nu,$$



de ce fait  $c\Pi_\nu = 0$  et, puisque  $c > 0$ ,  $\Pi_\nu = 0$ . Par conséquent (1.19)(2) et (1.19)(3) se vérifient, ce qui conclue la démonstration.  $\square$

De là, le problème variationnel discret  $\mathcal{P}_V^h$  peut être réécrit sous une autre forme algébrique discrète équivalente, comme suit

$$(7.17) \quad A(\mathbf{u}) + \lambda_\nu \nu = \mathbf{f},$$

$$(7.18) \quad u_{\nu,p} + [-u_{\nu,p} - c\lambda_{\nu,p}]_+ = 0 \quad \text{pour tout } p \in \Gamma_3.$$

En utilisant (7.18), nous proposons un schéma implicite sur  $\Gamma_3$  qui peut être formulé de la manière suivante :

$$(7.19) \quad u_{\nu p}^{(k+1)} = -[-u_{\nu p}^{(k)} - c\lambda_{\nu p}^{(k+1)}]_+, \quad \text{pour tout } p \in \Gamma_3^h.$$

A présent, nous nous tournons vers la description de l'algorithme de projection itérative, déjà présenté dans [144] pour les équations de Laplace avec une contrainte unilatérale, que nous étendons au problème de contact hyperélastique. Comme nous allons le voir, la méthode proposée est basée sur l'introduction d'ensemble de noeuds de contact où les conditions unilatérales sont actives (ensemble  $\mathcal{A}$ ) ou inactives (ensemble  $\mathcal{I}$ ). Cet algorithme repose sur les étapes suivantes :

(i) Choix de  $(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda^{(0)})$ , posons  $k = 0$ .

(ii) Définition de l'ensemble actif  $\mathcal{A}_{k+1} = \{p \in \Gamma_3^h : u_{\nu,p}^{(k)} + c\lambda_{\nu,p}^{(k)} \geq 0\}$ ,  
Définition de l'ensemble inactif  $\mathcal{I}_{k+1} = \Gamma_3^h \setminus \mathcal{A}_{k+1}$ .

(iii) Détermination de  $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)})$  tels que

$$(7.20) \quad A(\mathbf{u}^{(k+1)}) + \lambda_\nu^{(k+1)} \nu = \mathbf{f},$$

$$(7.21) \quad u_{\nu,p}^{(k+1)} = 0 \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{A}_{k+1},$$

$$(7.22) \quad u_{\nu,p}^{(k+1)} = u_{\nu,p}^{(k)} + c\lambda_{\nu,p}^{(k+1)} \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{I}_{k+1}.$$

(iv) Si  $\|(\mathbf{u}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}) - (\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})\| \leq \epsilon$ ,  $\|\mathcal{R}(\mathbf{u}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)})\| \leq \epsilon$  et  $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k$  puis stop, sinon retour en (ii).

Bien que l'expression "méthode active set" n'ait jamais été employé dans [144], l'algorithme remplit le même objectif que les stratégies de type "active set" comme présentées dans la section 3.2, à savoir déterminer l'ensemble  $\mathcal{A}$  des noeuds en contact avec

un obstacle parfaitement rigide. Cependant, l'obtention de l'ensemble des noeuds inactifs  $\mathcal{I} = \Gamma_3 \setminus \mathcal{A}$  change drastiquement en fonction de l'algorithme utilisé. Dans le cas de la méthode "Primal dual active set", l'ensemble inactif est déterminé en utilisant la condition de Neumann  $\lambda_{\nu,p}^{(k+1)} = 0$  à la frontière alors que, dans le cas de la méthode de projection itérative, la condition de Robin  $u_{\nu,p}^{(k+1)} = u_{\nu,p}^{(k)} + c\lambda_{\nu,p}^{(k+1)}$  pour tout  $p \in \mathcal{I}_{k+1}$  est utilisée à la place. De ce fait, l'équation non linéaire (7.20) peut être résolue par une méthode de Newton généralisée dans laquelle la condition de Robin (7.22) doit être incluse au préalable. Cela conduit bien évidemment à un calcul de la différentielle de  $\mathcal{R}_*^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$  par rapport à  $\mathbf{u}^{(k)}$ , différent de celui de la méthode "Primal dual active set"; en partant du système suivant :

$$(7.23) \quad \mathcal{R}_*(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = A(\mathbf{u}) + \lambda_{\nu}\nu - \mathbf{f} \\ \mathcal{R}_*^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = u_{\nu,p} + [-u_{\nu,p} - c\lambda_{\nu,p}]_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De là, la démarche consiste à injecter (7.22) dans (7.20) pour les noeuds inactifs en remplaçant  $\lambda_{\nu,p}^{(k+1)}$  par  $\frac{u_{\nu,p}^{(k+1)} - u_{\nu,p}^{(k)}}{c}$ . Le terme  $\frac{u_{\nu,p}^{(k)}}{c}$  étant connu, puisqu'il a été déterminé à l'itération précédente, il sera pris en compte dans le second membre. Le terme  $\frac{u_{\nu,p}^{(k+1)}}{c}$ , qui est à déterminer, apportera une contribution diagonale à l'opérateur  $A$  discrétisé.

**Remarque 7.2.** Notons une nouvelle fois que, comme pour la méthode "Primal dual active set", il n'est pas nécessaire de considérer des noeuds additionnels fictifs dans le maillage initial pour la méthode du Lagrangien augmenté. Ce point spécifique constitue l'un des principaux avantages des méthodes "active set".

## 7.3 Analyse de convergence de la méthode de projection

Puisque la convergence de la méthode de projection reste à ce jour une question ouverte dans le cas hyperélastique, nous nous intéressons à la convergence dans le cadre des petites déformations. Par conséquent, sous l'hypothèse de la théorie des petits déplacements-gradients, le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\Pi}$  peut être remplacé par le tenseur de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , si  $\|\mathbf{u}\| \ll 1$  et  $\|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1$  (cf [44, p. 71]). Nous considérons alors une loi constitutive élastique, déjà présentée dans (1.2.1), donnée par la relation

$$(7.24) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}).$$

Nous supposons également que le tenseur d'élasticité  $\mathcal{E}$  satisfait les conditions suivantes.

$$(7.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{E}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{E}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{E}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{E}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) L' application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) L' application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

**Remarque 7.3.** Rappelons que les hypothèses précédentes furent utilisées dans [122] afin de prouver l'unicité de la solution faible.

Afin d'établir le résultat de convergence de la méthode de projection itérative présentée dans la section 7.2, nous devons en premier lieu démontrer quelques résultats préliminaires, présentés sous forme de deux lemmes. Dans ce qui suit, on suppose que  $(u_{\nu}, \sigma_{\nu}) \in L^2(\Gamma_3)^2$ .

**Lemme 7.4.** Désignons par  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  la solution faible du problème de Signorini  $\mathcal{P}$  dans le cas de la théorie des petites déformations et soit  $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k+1)})$  la solution obtenue à l'itération  $k + 1$  par la méthode de projection itérative ; alors

$$(7.26) \quad (\sigma_{\nu}^{(k+1)}, u_{\nu}^{(k)} - u_{\nu})_{\Gamma_3} \geq (\sigma_{\nu}^{(k+1)}, u_{\nu}^{(k)} - u_{\nu}^{(k+1)})_{\Gamma_3}.$$

**Démonstration.** Avec la condition de complémentarité (1.19)(3), nous avons

$$(\sigma_{\nu}, u_{\nu}^{(k+1)} - u_{\nu})_{\Gamma_3} = (\sigma_{\nu}, u_{\nu}^{(k+1)})_{\Gamma_3}.$$

De plus, puisque

$$u_{\nu}^{(k+1)} = -[-u_{\nu}^{(k)} + c\sigma_{\nu}^{(k+1)}]_+ \leq 0 \text{ et } \sigma_{\nu} \leq 0,$$

nous avons

$$(7.27) \quad (\sigma_{\nu}, u_{\nu}^{(k+1)} - u_{\nu})_{\Gamma_3} \geq 0.$$

En appliquant maintenant la formule de Green, nous constatons que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(k+1)}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \, dx &= \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} - \boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}) \, da \\ &\quad - \int_{\Omega} \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}) \, dx. \end{aligned}$$

De là, en utilisant (7.2), (7.3), (7.4) et (7.6) nous obtenons

$$(7.28) \quad \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(k+1)}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) dx = (\sigma_{\nu}^{(k+1)} - \sigma_{\nu}, u_{\nu}^{(k+1)} - u_{\nu})_{\Gamma_3},$$

par ailleurs, avec (7.25)(c) et (7.24)

$$(7.29) \quad \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(k+1)}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) dx \geq m_{\varepsilon} \|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}\|_V^2 \geq 0,$$

et, en combinant (7.28) et (7.29),

$$(7.30) \quad (\sigma_{\nu}^{(k+1)} - \sigma_{\nu}, u_{\nu}^{(k+1)} - u_{\nu})_{\Gamma_3} \geq 0.$$

Alors, d'après (7.27) et (7.30)

$$(\sigma_{\nu}^{(k+1)}, u_{\nu}^{(k+1)} - u_{\nu})_{\Gamma_3} \geq (\sigma_{\nu}, u_{\nu}^{(k+1)} - u_{\nu})_{\Gamma_3} \geq 0.$$

De là, nous en déduisons le Lemme 7.4

$$\begin{aligned} (\sigma_{\nu}^{(k+1)}, u_{\nu}^{(k)} - u_{\nu})_{\Gamma_3} &= (\sigma_{\nu}^{(k+1)}, u_{\nu}^{(k)} - u_{\nu}^{(k+1)} + u_{\nu}^{(k+1)} - u_{\nu})_{\Gamma_3} \\ &\geq (\sigma_{\nu}^{(k+1)}, u_{\nu}^{(k)} - u_{\nu}^{(k+1)})_{\Gamma_3}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 7.5.** *Désignons par  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  la solution faible du problème de Signorini  $\mathcal{P}$  et soit  $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k+1)})$  la solution obtenue à l'itération  $k+1$  de la méthode de projection itérative; alors*

$$(7.31) \quad \|u_{\nu}^{(k+1)} - u_{\nu}\|_{\Gamma_3}^2 \leq \|u_{\nu}^{(k)} - c\sigma_{\nu}^{(k+1)} - u_{\nu}\|_{\Gamma_3}^2 - \|u_{\nu}^{(k+1)} + c\sigma_{\nu}^{(k+1)} - u_{\nu}^{(k)}\|_{\Gamma_3}^2.$$

**Démonstration.** La Proposition 2.3 et les égalités suivantes

$$P_{\mathbb{R}^+}(-u_{\nu}^{(k)} + c\sigma_{\nu}^{(k+1)}) = [-u_{\nu}^{(k)} + c\sigma_{\nu}^{(k+1)}]_+ = -u_{\nu}^{(k+1)} \text{ et } y = -u_{\nu} \geq 0,$$

nous permettent d'obtenir

$$(7.32) \quad (u_{\nu}^{(k+1)} - (u_{\nu}^{(k)} - c\sigma_{\nu}^{(k+1)}), u_{\nu}^{(k+1)} - u_{\nu})_{\Gamma_3} \leq 0,$$

et, de là

$$\begin{aligned}
\|u_\nu^{(k+1)} - u_\nu\|_{L^3}^2 &= \|u_\nu^{(k+1)} - (u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)}) + (u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)}) - u_\nu\|_{L^3}^2 \\
&= \|u_\nu^{(k+1)} - (u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)})\|_{L^3}^2 + \|(u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)}) - u_\nu\|_{L^3}^2 \\
&\quad + 2(u_\nu^{(k+1)} - (u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)}), (u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)}) - u_\nu)_{L^3} \\
&= \|(u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)}) - u_\nu\|_{L^3}^2 - \|u_\nu^{(k+1)} - (u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)})\|_{L^3}^2 \\
&\quad + 2(u_\nu^{(k+1)} - (u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)}), u_\nu^{(k+1)} - u_\nu) \\
&\leq \|(u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)}) - u_\nu\|_{L^3}^2 - \|u_\nu^{(k+1)} - (u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)})\|_{L^3}^2.
\end{aligned}$$

□

En utilisant les Lemmes ci-dessus, nous sommes en mesure de prouver le théorème suivant

**Théorème 7.6.** *La suite  $\{u_\nu^{(k)}\}$ , définie par (7.19) pour la méthode de projection itérative, converge vers l'unique solution  $u$  du problème de Signorini lorsque  $k \rightarrow \infty$ .*

**Démonstration.** Tout d'abord, en utilisant le Lemme 7.5, nous avons

$$\begin{aligned}
(7.33) \quad \|u_\nu^{(k+1)} - u_\nu\|_{L^3}^2 &\leq \|u_\nu^{(k)} - c\sigma_\nu^{(k+1)} - u_\nu\|_{L^3}^2 \\
&\quad - \|u_\nu^{(k+1)} + c\sigma_\nu^{(k+1)} - u_\nu^{(k)}\|_{L^3}^2 \\
&\leq \|u_\nu^{(k)} - u_\nu\|_{L^3}^2 - \|u_\nu^{(k+1)} - u_\nu^{(k)}\|_{L^3}^2 \\
&\quad - 2(c\sigma_\nu^{(k+1)}, u_\nu^{(k)} - u_\nu) - 2(c\sigma_\nu^{(k+1)}, u_\nu^{(k+1)} - u_\nu^{(k)}),
\end{aligned}$$

puis, d'après le Lemme 7.4,

$$(7.34) \quad \|u_\nu^{(k+1)} - u_\nu\|_{L^3}^2 \leq \|u_\nu^{(k)} - u_\nu\|_{L^3}^2 - \|u_\nu^{(k+1)} - u_\nu^{(k)}\|_{L^3}^2.$$

Ensuite, nous considérons  $S = \sum_{k=0}^{\infty} \|u_\nu^{(k+1)} - u_\nu^{(k)}\|_{L^3}^2$

$$S \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\|u_\nu^{(k)} - u_\nu\|_{L^3}^2 - \|u_\nu^{(k+1)} - u_\nu\|_{L^3}^2).$$

Puisque  $\{u_\nu^{(k)}\}$  est bornée, avec  $u_\nu^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_\nu^{(k)}$ , nous déduisons

$$(7.35) \quad S \leq \|u_\nu^{(0)} - u_\nu\|_{L^3}^2 - \|u_\nu^{(\infty)} - u_\nu\|_{L^3}^2 < \infty.$$

Cela signifie que la série infinie de terme général  $\|u_\nu^{(k+1)} - u_\nu^{(k)}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2$  converge. Ainsi

$$(7.36) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_\nu^{(k+1)} - u_\nu^{(k)}\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 = 0.$$

Par conséquent  $\{u_\nu^{(k)}\}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\Gamma_3)$ . Soit le couple  $(u^*, \sigma^*) = (u_\nu^{(\infty)}, \sigma_\nu^{(\infty)})$ , avec  $u_\nu^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_\nu^{(k)}$  et  $\sigma_\nu^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_\nu^{(k)}$ . Un tel couple vérifie le problème de point fixe (7.16), à savoir la solution du problème de Signorini ; par conséquent

$$(7.37) \quad u^* = u_\nu \text{ et } \sigma^* = \sigma_\nu,$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

Notons que le résultat d'existence mentionné dans la section 7.1 ne requiert aucune hypothèse de coercivité, ou tout du moins d'hypothèse de monotonie, de la part du tenseur de Piola-Kirchhoff  $\Pi$ , propriétés utilisées en particulier dans (7.30). Par conséquent, la question de savoir si le Théorème 7.6 est toujours valide dans le cadre des grandes déformations reste à ce jour ouverte.

## 7.4 Simulations numériques

L'objectif de la section est de présenter quelques simulations numériques visant à illustrer, entre autres, le comportement des solutions numériques du problème de contact  $\mathcal{P}$  via les méthodes de projection, de "Primal dual active set" et de Lagrangien augmenté. Ces simulations concernent deux problèmes de contact en statique : le contact sans frottement d'une demi-balle élastique contre une fondation rigide et le contact sans frottement d'un anneau hyperélastique sur une fondation rigide. La solution numérique du Problème  $\mathcal{P}$  est calculée avec la méthode de projection itérative présentée et analysée dans les deux précédentes sections et la méthode "Primal dual active set" décrites en section 3.2 que nous comparons ensuite avec les résultats obtenus avec la méthode du Lagrangien augmenté.

### 7.4.1 Problème de Hertz : contact d'une demi-balle

En règle générale, il est particulièrement délicat de trouver une solution analytique pour des problèmes de contact, du fait de leur complexité. Toutefois, certains problèmes étudiés par Hertz dans [64] dérogent à cette règle. Nous nous intéressons ici à la compression d'une demi-balle contre une fondation (cf Figure 1). Nous considérons le

domaine suivant :

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - R)^2 \leq R^2, x_2 \leq R\}, \\ \Gamma_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 = R\}, \\ \Gamma_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = R, -R \leq x_1 \leq R\}, \\ \Gamma_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - R)^2 = R^2, x_2 \leq R\}.\end{aligned}$$

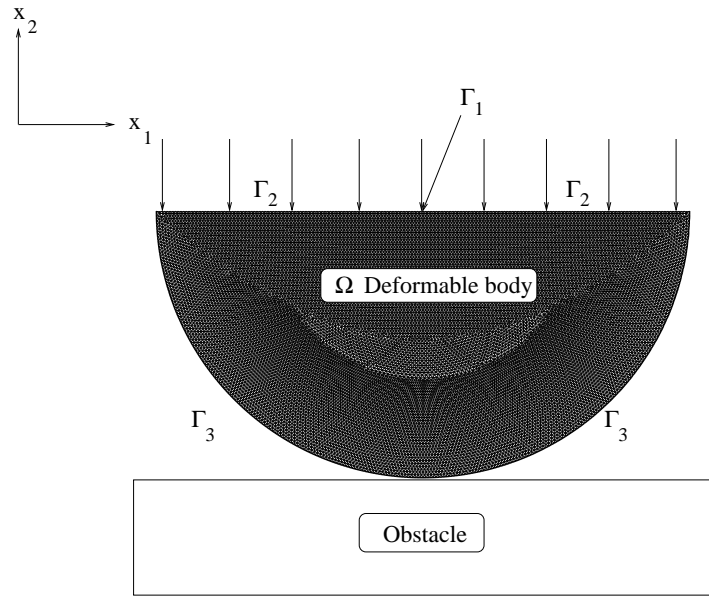


FIGURE 7.1 : Configuration initiale du problème de contact de hertz.

Le domaine  $\Omega$  représente la coupe transversale d'un corps tridimensionnel déformable soumis à l'action de forces de traction de manière à ce que l'hypothèse de déformation plane soit valide. La composante horizontale du champ de déplacement disparaît sur  $\Gamma_1$ . Les forces de traction verticale de densité  $\mathbf{f}_2$  agissent sur la frontière  $\Gamma_2$ . Aucune force volumique n'est supposée agir sur le système. Le corps est en contact sans frottement avec un obstacle sur la partie  $\Gamma_3$  de sa frontière. Pour la discrétisation, nous avons la possibilité de modifier à loisir un paramètre  $N_{\Gamma_3}^h$  décrivant le nombre de noeuds sur  $\Gamma_3$  (le nombre de noeuds sur  $\Gamma_2$  est alors choisi de manière à ce que les éléments soient suffisamment réguliers). Dans la configuration  $N_{\Gamma_3}^h = 256$  représenté dans la Figure 7.1, nous avons utilisé 30356 éléments finis élastiques pour un nombre de degrés de liberté total de 30810. Nous modélisons le comportement du matériau

avec une loi constitutive dans laquelle le tenseur élastique  $\mathcal{E}$  satisfait

$$(\mathcal{E}\varepsilon)_{\alpha\beta} = \frac{E\kappa}{(1+\kappa)(1-2\kappa)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{\alpha\beta} + \frac{E}{1+\kappa}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2.$$

Avec  $E$ , le module de Young,  $\kappa$ , le coefficient de Poisson du matériau et  $\delta_{\alpha\beta}$  le symbole de Kronecker.

Pour les simulations numériques, nous considérons les données suivantes :

$$\begin{aligned} E &= 150GPa, \quad \kappa = 0.3, \\ \mathbf{f}_0 &= (0, 0)GPa, \quad \mathbf{f}_2 = (0, -2)GPa.m \quad \text{sur } \Gamma_2, \\ R &= 8m, \quad \text{critère d'arrêt : } \epsilon = 10^{-5}. \end{aligned}$$

Dans la Figure 2, la configuration déformée ainsi que les contraintes normales de contact sur la frontière  $\Gamma_3$  sont représentées.

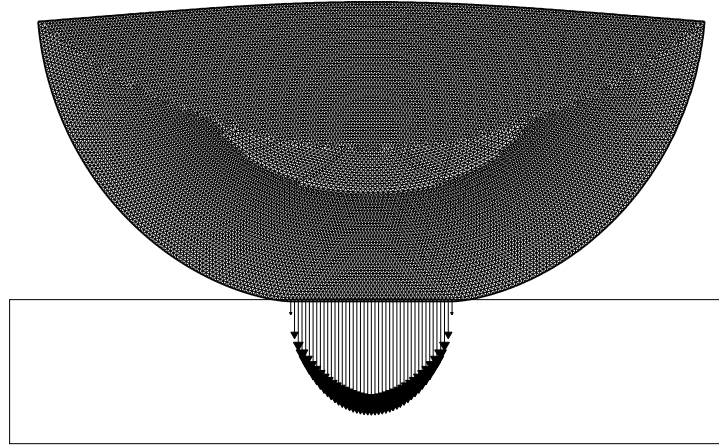


FIGURE 7.2 : Maillage déformé et contraintes normales de contact sur  $\Gamma_3$ .

**Précision des méthodes par rapport à la solution analytique.** D'après la théorie développée par Hertz, il est possible de calculer la solution analytique donnée par la distribution de pression normale sur  $\Gamma_3$  :

$$(7.38) \quad \begin{cases} \text{Si } |x_1| < b, & p_\nu = -\frac{4R\mathbf{f}_{2y}}{\pi b^2}\sqrt{b^2 - x_1^2} \quad (\text{contact}), \\ \text{Sinon} & p_\nu = 0 \quad (\text{pas de contact}), \end{cases}$$

avec  $b = 2\sqrt{\frac{2R^2\mathbf{f}_{2y}(1-\kappa^2)}{E\pi}}$ . Nous présentons maintenant la comparaison entre les solutions numériques, obtenues via la méthode de projection itérative, la méthode



"Primal dual active set", le Lagrangien augmenté, et la solution analytique (7.38), donnée par la théorie de Hertz.

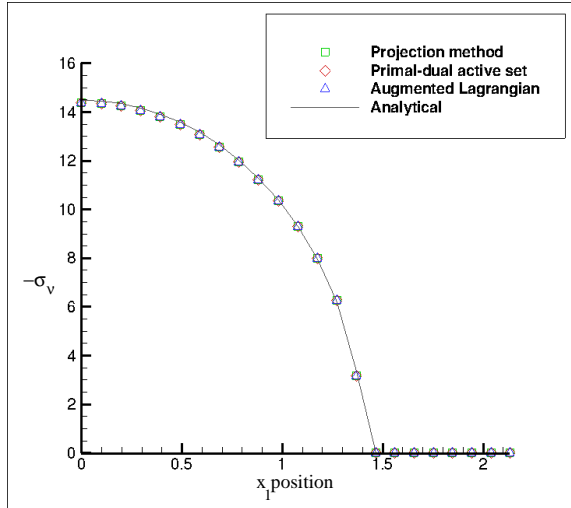


FIGURE 7.3 : Contrainte normale de contact  $\sigma_\nu$  sur  $\Gamma_3$ .

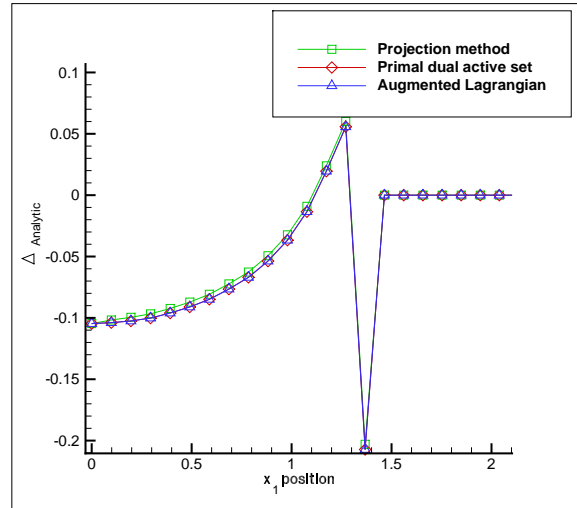


FIGURE 7.4 : Evolution de  $\Delta_{Analytic}$  pour les trois méthodes sur  $\Gamma_3$ . ( $c = \gamma = 10^4$ ).

Tout d'abord, nous examinons la précision des deux méthodes de type "active set" sus-citées sur le modèle élément fini en les comparant à la méthode, bien connue, du Lagrangien augmenté et à la solution analytique. La frontière  $\Gamma_3$  est divisée en 256 parties égales ; la contrainte normale de contact  $\sigma_\nu$  est représentée sur la Figure 7.3 en fonction de l'abscisse et ce pour chaque méthode. Notons que la solution analytique et les solutions numériques sont presque confondues. Par conséquent, comme on pouvait s'y attendre, la méthode de projection itérative et la méthode "Primal dual active set" sont fiables sur ce cas test. Néanmoins, afin de bien apprécier l'erreur absolue des méthodes, nous avons choisi de représenter sur la Figure 7.4 l'écart entre la solution analytique et chacune des trois méthodes. Notons que, bien qu'il existe une très légère différence entre les deux méthodes "active set", aucune différence ne transparaît à première vue entre la méthode "Primal dual active set" et la méthode du Lagrangien augmenté.

A présent, nous sommes en mesure de comparer l'efficacité des algorithmes implémentés.

**Performances des algorithmes.** Dans la Table 7.1, nous donnons le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence de la méthode de projection itérative et la méthode du Lagrangien augmenté, respectivement, en fonction de plusieurs valeurs

du paramètre  $c$ , utilisé dans la section 7.2, et de  $N_{I_3}^h$ , le nombre de noeuds de  $I_3^h$ . La même étude est effectuée pour plusieurs valeurs du paramètre  $\gamma$ , utilisé dans la section 3.2 pour la méthode "Primal dual active set" (Table 7.2).

	Projection itérative					Lagrangien augm.
$N_{I_3}^h$	$c = 1$	$c = 10$	$c = 10^2$	$c = 10^3$	$c = 10^4$	
128	11	8	7	7	7	7
256	11	9	8	8	8	8
512	18	10	9	9	9	9

TABLE 7.1: Nombre d'itérations en fonction de  $c$  et  $N_{I_3}^h$  pour la convergence de la méthode de projection itérative.

	"Primal dual active set"					Lagrangien augm.
$N_{I_3}^h$	$\gamma = 1$	$\gamma = 10$	$\gamma = 10^2$	$\gamma = 10^3$	$\gamma = 10^4$	
128	7	7	7	7	7	7
256	8	8	8	8	8	8
512	9	9	9	9	9	9

TABLE 7.2: Nombre d'itérations en fonction de  $\gamma$  et  $N_{I_3}^h$  pour la convergence de la méthode "Primal dual active set".

D'après les tables 7.1–7.2, comme on pouvait s'y attendre, les paramètres arbitraires  $c$  et  $\gamma$  n'ont que peu d'influence sur le nombre d'itérations pour la méthode de projection itérative et la méthode "Primal dual active set", respectivement. Toutefois, cela n'est plus exactement le cas pour la méthode de projection itérative si  $c$  est inférieur ou égal à 10. Ce comportement vient du fait que la condition (7.18) est approximée de manière itérative par le schéma (7.19) qui prend un sens lorsque  $c$  est grand et tend vers l'infini. Il convient de préciser que les conditions (3.31) et (3.32) sont reliées à la condition unilatérale (3.20) qui est équivalente à la condition (7.16). Par ailleurs, notons que le nombre d'itérations pour le Lagrangien augmenté et les méthodes "active set" est identique pour chaque valeur de  $N_{I_3}^h$ .

Ensuite, nous étudions l'évolution de l'erreur  $E_k = \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2$  par rapport à l'indice de numérotation des itérations  $k$  pour chaque méthode, avec  $c = \gamma = 10^4$ , et pour 3 valeurs de  $N_{I_3}^h$  ( $N_{I_3}^h = 128, 256, 512$ ) dans les Figures 7.5–7.7. Nous pouvons constater qu'il n'y a pas de différences notables entre la courbe correspondant à la méthode de projection itérative et la courbe correspondant à la méthode "Primal-dual

active set". Par ailleurs, le comportement de l'erreur pour ces méthodes est similaire à celui obtenu avec la méthode du Lagrangien augmenté

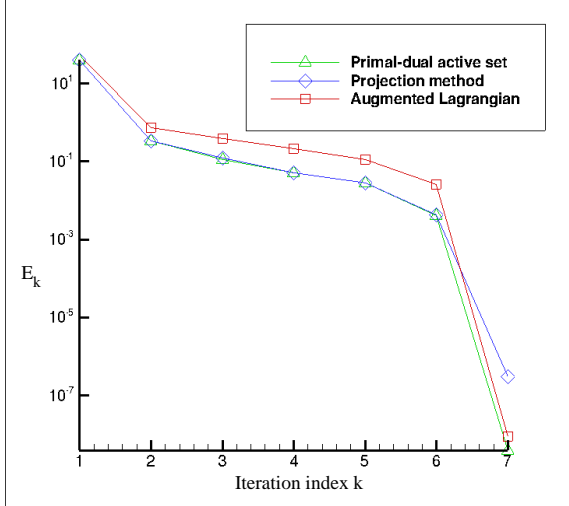


FIGURE 7.5 : Evolution de  $E_k$  en fonction de  $k$  pour  $N_{I_3}^h = 128$  ( $c = \gamma = 10^4$ ).

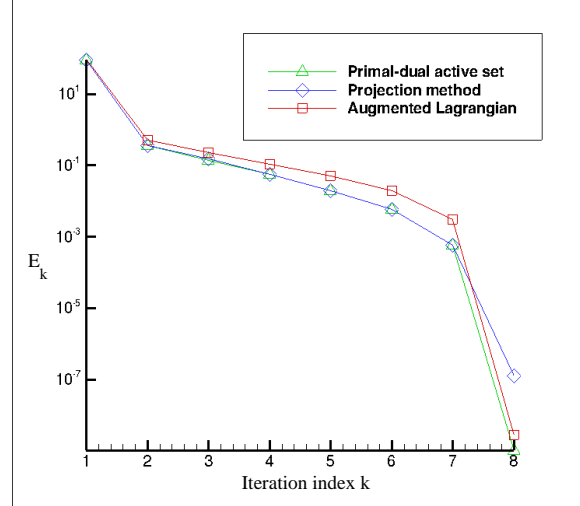


FIGURE 7.6 : Evolution de  $E_k$  en fonction de  $k$  pour  $N_{I_3}^h = 256$  ( $c = \gamma = 10^4$ ).

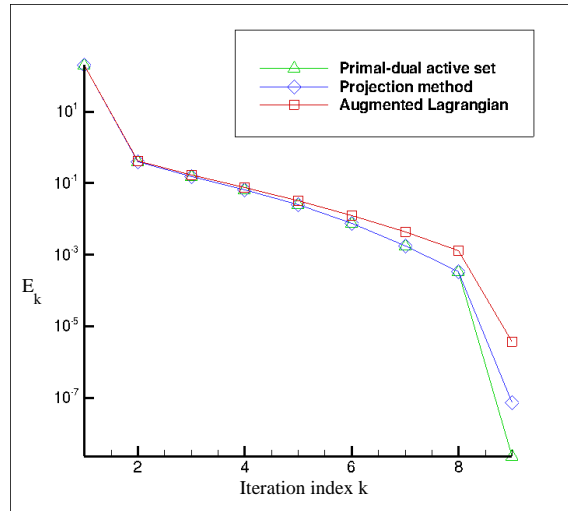


FIGURE 7.7 : Evolution de  $E_k$  en fonction de  $k$  pour  $N_{I_3}^h = 512$  ( $c = \gamma = 10^4$ ).

Dans la Table 7.3, nous fournissons le temps CPU de la simulation pour chaque méthode en fonction de  $N_{I_3}^h$ . Les deux méthodes de type "active set" sont, en terme de temps CPU, largement plus rapides que la méthode du Lagrangien augmenté. En fait, compte tenu des faibles écarts entre la méthode "Primal dual active set" et la

méthode de projection itérative, nous pouvons considérer qu'elles sont aussi rapides l'une que l'autre, à la fois en terme d'itérations et en terme de temps CPU. Un tel comportement peut être expliqué par l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange pour la méthode du Lagrangien augmenté qui d'une part augmente la taille du système à résoudre et d'autre part détériore le conditionnement des systèmes linéaires issus de la méthode de Newton. Cela implique, de ce fait, une augmentation du temps CPU des systèmes linéarisés. Nous appuyons nos dires avec la taille des systèmes linéaires tangents à résoudre à chaque itération de Newton, i.e. le nombre de degrés de liberté, dans chaque cas en fonction de la discrétisation considérée :

- $N_{\Gamma_3}^h = 128$  : 7921 ddl pour la méthode du Lagrangien augmenté contre 7792 ddl pour les méthodes active set,
- $N_{\Gamma_3}^h = 256$  : 31067 ddl pour la méthode du Lagrangien augmenté contre 30810 ddl pour les méthodes active set,
- $N_{\Gamma_3}^h = 512$  : 123065 ddl pour la méthode du Lagrangien augmenté contre 122552 ddl pour les méthodes active set.

$N_{\Gamma_3}^h$	Projection itérative	"Primal dual active set"	Lagrangien Augm.
128	5	4	7
256	29	29	54
512	208	205	472

TABLE 7.3: Temps CPU (en secondes) pour chaque méthode en fonction de  $N_{\Gamma_3}^h$  avec  $c = 10^4$  et  $\gamma = 10^4$ .

**Evolution des maillages déformés au cours du processus itératif.** Nous montrons maintenant dans les Figures 7.8 –7.9 les maillages déformés à différentes étapes de convergence des méthodes de type "active set" et de la méthode du Lagrangien augmenté. Plus exactement, les configurations déformées sont représentées pour les itérations 1, 3, 5 et 8. Il est tout à fait pertinent de les comparer puisque les trois méthodes convergent toutes avec le même nombre d'itérations pour  $c = \gamma = 10^4$ .

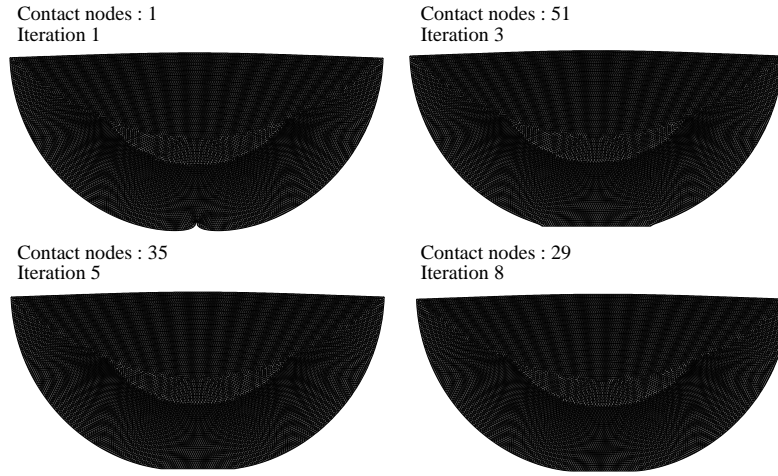


FIGURE 7.8 : Maillages déformés au cours du processus itératif pour la méthode du Lagrangien augmenté avec  $N_{\Gamma_3}^h = 256$ .

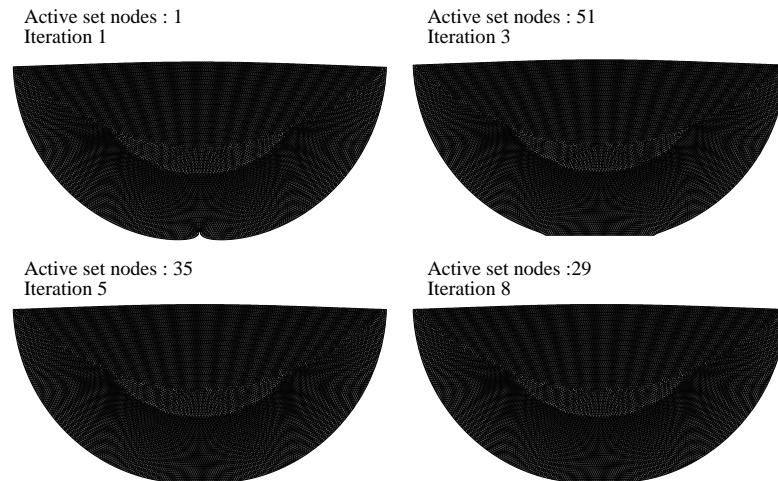


FIGURE 7.9 : Maillages déformés au cours du processus itératif pour la méthode "Primal dual active set"/projection itérative avec  $N_{\Gamma_3}^h = 256$ .

De fait, les maillages déformés au cours du processus itératif des méthodes de type "active set" et Lagrangien augmenté sont identiques deux à deux. Cela signifie que nous retrouvons le même nombre de noeuds en contact sur  $\Gamma_3$  à chaque itération pour chacune des paires correspondantes. Ce comportement provient du fait que les conditions de contact (3.20) et (7.16) utilisées pour les deux méthodes de type "active set" correspondent exactement à la seconde équation du système non linéaire (3.10) découlant de la méthode du Lagrangien augmenté.

**Estimations d'erreur.** Enfin, nous vérifions la convergence des schémas discrets dans le cas des méthodes "active set". Pour ce faire, une suite de solutions numériques est déterminée en utilisant une triangularisation du corps avec un paramètre de discrétisation spatiale  $h$ . Puisque, dans l'exemple considéré, les solutions des deux méthodes de type "active set" sont identiques, nous fournissons cette étude numérique pour la méthode de projection uniquement. Les approximations de l'estimation de l'erreur numérique  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V$ , désigné par  $E^h$  dans la Figure 7.10, sont établies pour plusieurs valeurs du paramètre de discrétisation spatiale  $h$ . Ici, la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est divisée en  $1/h$  parties égales. Nous commençons avec  $h = 1/2$  puis procédons par des divisions successives par deux du pas. La solution numérique correspondant à  $h = 1/512$  est considérée comme étant la solution "exacte", et sert de référence pour définir les erreurs de la solution numérique pour 6 valeurs de  $h$  plus élevées. Ainsi, les résultats obtenus pour les valeurs suivantes de  $h$  :  $h = 1/64$ ,  $h = 1/96$ ,  $h = 1/128$ ,  $h = 1/192$ ,  $h = 1/256$  et  $h = 1/384$  sont représentées. Les résultats numériques sont présentés dans la Figure 7.10 dans laquelle l'estimation de l'erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_V$  est tracée en fonction de  $h$ .

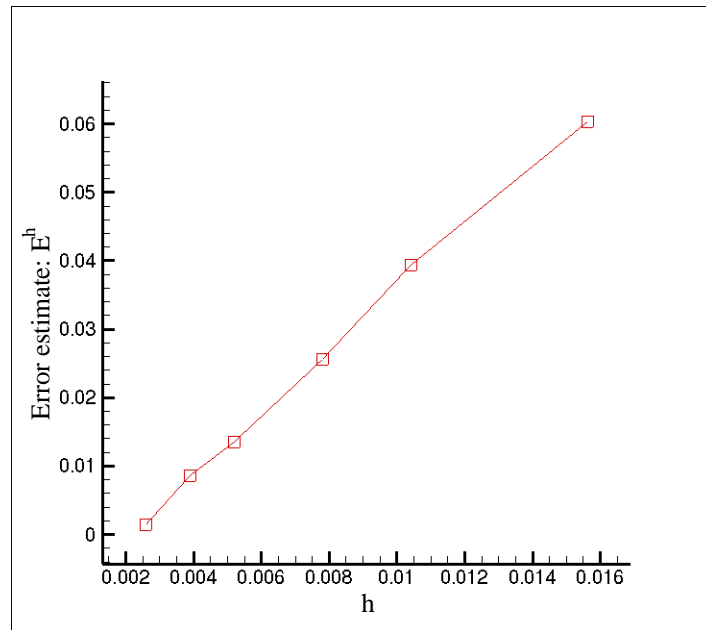


FIGURE 7.10 : Estimation de l'erreur numérique.

La Figure 7.10 traduit un comportement linéairement asymptotique de l'erreur, résultat en accord avec les estimations théoriques de l'erreur établies dans [30, 82],

dans le cadre des petites déformations.

### 7.4.2 Compression d'un anneau hyperélastique contre une fondation

Nous considérons à présent une seconde configuration, cela afin de valider les performances des méthodes de type "active set" dans le cas des grandes déformations. On s'intéresse à un problème de contact sans frottement en grandes déformations, à savoir la compression d'un anneau hyperélastique contre une fondation rigide. La configuration de référence du problème, présentée dans la Figure 7.11 , est détaillée ci-dessous :

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : R_i^2 \leq x_1^2 + (x_2 - R_e)^2 \leq R_e^2\}, \\ \Gamma_1 &= \widehat{AB}, \quad \Gamma_2 = \emptyset, \\ \Gamma_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - R_e)^2 = R_e^2, \quad x_2 \leq \sqrt{2}R_e\}.\end{aligned}$$

Sur la partie  $\Gamma_1$ , un déplacement vertical  $\mathbf{u}_0$  est imposé. Aucune force n'est supposée agir sur le corps hyperélastique. Le corps est en contact sans frottement avec un obstacle sur la partie  $\Gamma_3$  de la frontière.

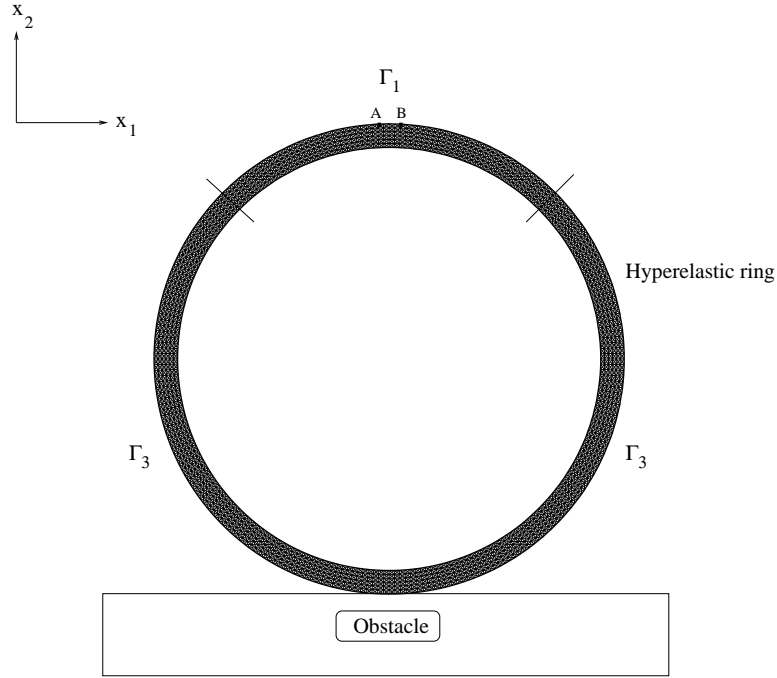


FIGURE 7.11 : Configuration de référence du problème de contact hyperélastique.

Le domaine  $\Omega$  représente la section transversale d'un corps hyperélastique tridimensionnel soumis à l'action d'un déplacement de telle manière que l'hypothèse des contraintes plane est valide. La fondation est donnée par  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 0\}$ . Pour la discrétisation, nous avons la possibilité de modifier à loisir le paramètre  $N_F^h$  décrivant le nombre de noeuds sur  $F$ ; le nombre de noeuds sur l'épaisseur de l'anneau est alors choisi afin de garantir l'obtention d'éléments suffisamment réguliers. Dans la configuration  $N_F^h = 256$  représentée dans la Figure 7.11, la frontière  $\Gamma_3$  est divisée en 192 parties égales, 6144 éléments finis hyperélastiques ont été utilisés pour un nombre total de degrés de liberté égal à 6656. Le comportement du matériau, considéré ici, est gouverné par une variante de la loi constitutive d'Ogden (cf [45]) défini par la densité d'énergie suivante

$$W(\mathbf{C}) = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) + a(I_3 - 1) - (c_1 + 2c_2 + a) \ln I_3.$$

Ici  $I_1, I_2$  et  $I_3$  représentent les trois invariants du tenseur  $\mathbf{C}$ , voir section 1.5. Pour les



simulations numériques, on considère les données suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= (0, -14)m, \\ \mathbf{f}_0 &= (0, 0)N/m^2, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{cases} (0, 0) N/m & , \\ (0, 0) N/m & , \end{cases} \\ c_1 &= 0.5MPa, \quad c_2 = 0.5 \times 10^{-2}MPa, \quad a = 0.35MPa, \\ R_i &= 9m, \quad R_e = 10m. \end{aligned}$$

Dans la Figure 7.12 , la configuration déformée ainsi que les contraintes normales de contact sur la frontière  $\Gamma_3$  sont représentées.

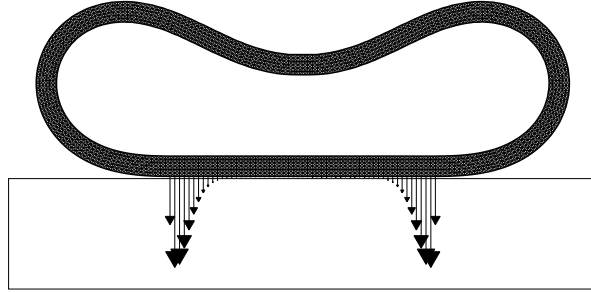


FIGURE 7.12 : Maillage déformé et contraintes normales de contact sur  $\Gamma_3$ .

Comme dans la section précédente 7.4.1, nous présentons la comparaison entre les solutions numériques obtenues via les méthodes de type "active set" d'une part et la méthode du Lagrangien augmenté d'autre part en étudiant en particulier la précision numérique, la convergence et les performances des méthodes.

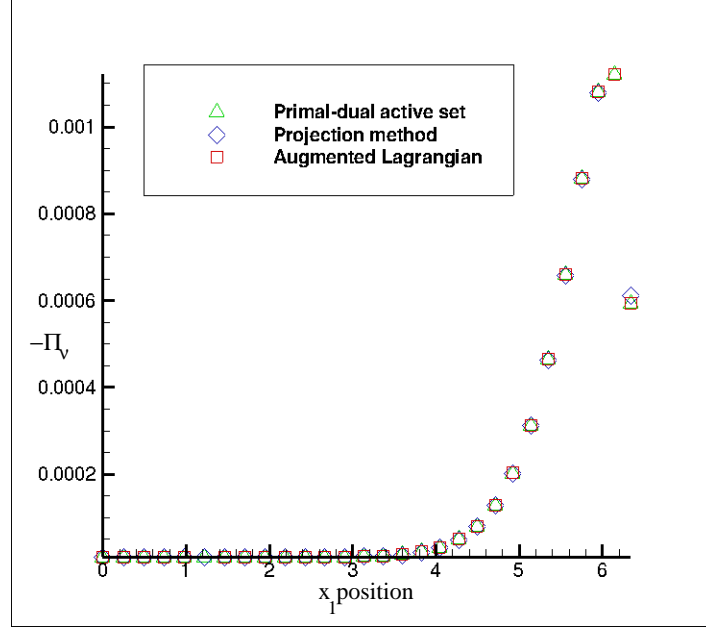


FIGURE 7.13 : Contrainte normale de contact  $\Pi_v$  sur  $\Gamma_3$ .

Tout d'abord dans la Figure 7.13, nous représentons la contrainte normale de contact  $\Pi_v$  en fonction de l'abscisse pour les trois méthodes déjà mentionnées. Il apparaît très clairement que les dites méthodes ne présentent aucune différence significative, indiquant par là-même que les méthodes de type "active set" sont aussi précises, même dans le cadre des grandes déformations sur ce cas test, que la méthode du Lagrangien augmenté.

À présent dans les Tables 7.4–7.5, comme dans la section 7.4.1, nous étudions l'évolution du nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode de projection itérative et de la méthode "Primal dual active set" par rapport à la méthode du Lagrangien augmenté. Dans cet exemple de contact hyperélastique, la dépendance en  $c$  du nombre d'itérations est bien plus marquée que pour le contact de hertz de la section 7.4.1. Nous constatons d'ailleurs que, lorsque  $c \leq 10$ , l'algorithme ne semble même pas converger (Ncv). Toutefois, d'après les Tables 7.4 et 7.5, pour une grande valeur de  $c$ , supérieure ou égale à  $10^4$ , le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode de projection itérative devient constant et égal au nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode "Primal dual active set". Par ailleurs, il est intéressant de constater que les valeurs de  $\gamma$  n'ont pratiquement aucune influence sur le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode "Primal dual active

set" pour ce problème de contact hyperélastique. Cela vient du fait de l'utilisation de la méthode de Newton semi-régulière pour le traitement de la condition de contact (3.20) permettant ainsi d'imposer des conditions sur  $\Gamma_3$  indépendantes du paramètre  $\gamma$ ; seuls les ensembles de noeuds Actifs et Inactifs en dépendent.

Comme dans la section 7.4.1, nous fournissons dans les Figures 7.14 –7.16 l'évolution de  $E_k = \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2$  en fonction de l'indice d'itération  $k$  pour la méthode du Lagrangien augmenté et les méthodes de type "active set" en faisant varier la valeur du paramètre de discrétisation ( $N = 128, 256, 512$ ).

	Méthode de Projection itérative						Lagrangien Augm.
$N_F^h$	$c = 10$	$c = 10^2$	$c = 10^3$	$c = 10^4$	$c = 10^5$	$c = 10^6$	
128	Ncv	294	41	12	13	13	8
256	Ncv	171	45	14	19	16	9
512	Ncv	378	45	14	14	19	10

TABLE 7.4: Nombre d'itérations en fonction de  $c$  et  $N_F^h$ , le nombre de noeuds sur  $\Gamma$ , pour la convergence de la méthode de projection itérative.

	"Primal dual active set"						Lagrangien Augm.
$N_F^h$	$\gamma = 10$	$\gamma = 10^2$	$\gamma = 10^3$	$\gamma = 10^4$	$\gamma = 10^5$	$\gamma = 10^6$	
128	12	12	12	12	12	12	8
256	13	13	13	13	15	14	9
512	14	14	14	14	14	14	10

TABLE 7.5: Nombre d'itérations en fonction de  $\gamma$  et  $N_F^h$ , le nombre de noeuds sur  $\Gamma$ , pour la convergence de la méthode "Primal dual active set".

Notons également que, contrairement à l'exemple numérique étudié en section 7.4.1, les deux méthodes de type "active set" nécessitent 4 itérations supplémentaires pour converger, par rapport à la méthode du Lagrangien augmenté. De plus, les maillages déformés au cours du processus de convergence pour la méthode "Primal dual active set" et la méthode de projection ne sont plus identiques dans cet exemple numérique, à un indice d'itération  $k$  donné. Notons également, d'après les Figures 7.14 –7.16 que la convergence de la méthode de projection semble plus régulière que celle de la méthode "Primal dual active set".

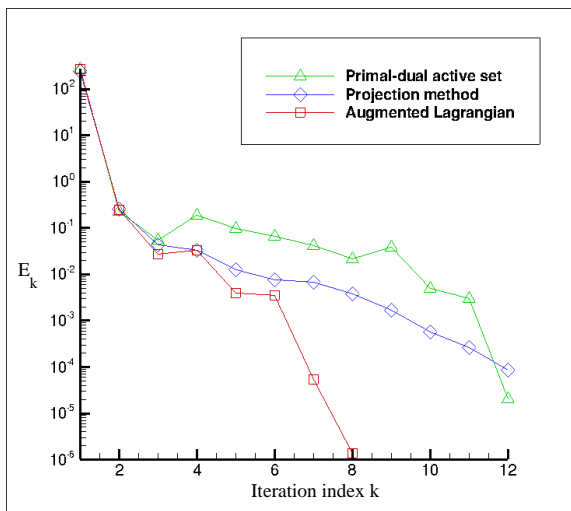


FIGURE 7.14 : Evolution de  $E_k$  en fonction de  $k$  pour  $N_F^h = 128$  ( $c = \gamma = 10^4$ ).

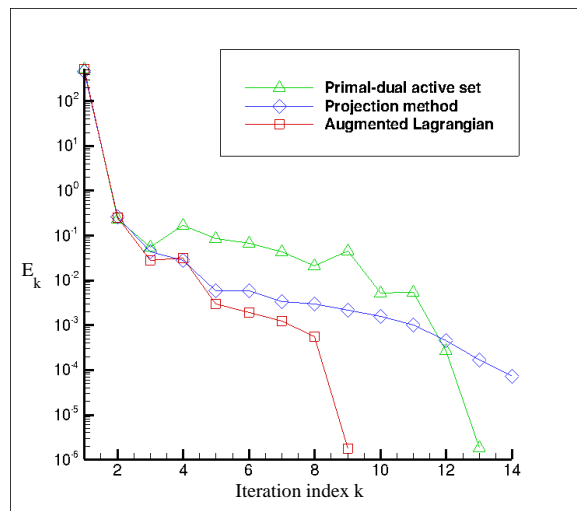


FIGURE 7.15 : Evolution de  $E_k$  en fonction de  $k$  pour  $N_F^h = 256$  ( $c = \gamma = 10^4$ ).

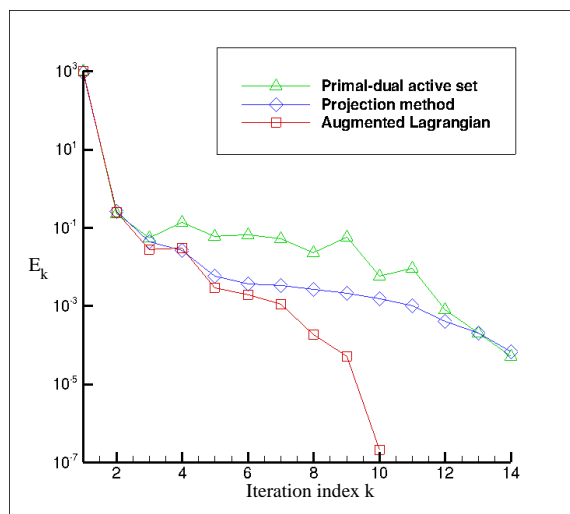


FIGURE 7.16 : Evolution de  $E_k$  en fonction de  $k$  pour  $N_F^h = 512$  ( $c = \gamma = 10^4$ ).

Enfin, nous fournissons dans la Table 7.6 une comparaison des méthodes en terme de temps CPU pour atteindre la convergence en fonction de la taille du problème. Cela nous conduit à dire que les deux méthodes de type "active set" ont une convergence plus rapide en terme de temps CPU que la méthode du Lagrangien augmenté. Tout

comme l'exemple en petites déformations de la section précédente, ce comportement s'explique par l'absence des multiplicateurs de Lagrange dans les méthodes de type "active set". Dans le cas présent, la proportion plus importante de noeuds potentiellement en contact, par rapport à l'exemple de Hertz, se traduit également par de meilleures performances des méthodes de type "active set" par rapport à la méthode du Lagrangien augmenté.

$N_F^h$	Projection itérative	"Primal dual active set"	Lagrangien augm.
128	1	1	1
256	19	17	43
512	89	87	160

TABLE 7.6: Temps CPU (en secondes) pour chaque méthode en fonction de  $N_F^h$  avec  $c = 10^4$  et  $\gamma = 10^4$ .

Comme dans le premier exemple (section 7.4.1), nous appuyons nos dires avec la taille du système linéaire tangent, i.e. le nombre de degrés de liberté, dans chaque cas en fonction de la discrétisation considérée :

- $N_F^h = 128$  : 1889 ddl pour la méthode du Lagrangien augmenté contre 1792 ddl pour les méthodes active set,
- $N_F^h = 256$  : 6849 ddl pour la méthode du Lagrangien augmenté contre 6656 ddl pour les méthodes active set,
- $N_F^h = 512$  : 25985 ddl pour la méthode du Lagrangien augmenté contre 25600 ddl pour les méthodes active set.

C'est d'ailleurs la raison principale pour laquelle le fait d'éviter d'avoir recours aux multiplicateurs de Lagrange reste un argument pertinent pour préférer les méthodes de type "active set" à la méthode du Lagrangien augmenté.

## 7.5 Conclusion

Nous nous sommes intéressés à l'analyse de deux méthodes de type "active set" à travers un problème classique issu de la littérature de la mécanique du contact, à savoir le problème de Signorini dans le cadre des petites et grandes déformations. Nous avons d'abord obtenu une formulation variationnelle, à partir du problème mécanique, ainsi qu'un résultat d'existence basé sur les propriétés d'une fonction d'énergie hyperélastique. Ensuite, nous avons proposé une approximation numérique du problème, tout en introduisant une nouvelle méthode de type "active set". La partie suivante était

consacrée à un résultat de convergence de l'algorithme de projection itérative, preuve basée sur des considérations portant sur des opérateurs de projection et les propriétés de l'opérateur élastique (propriétés d'ailleurs déjà utilisées pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème en petites déformations). Il s'agissait ensuite de présenter quelques simulations numériques visant à comparer le comportement des deux méthodes de type "active set". Ces simulations ont été menées sur deux problèmes tests, dans lesquelles le Lagrangien augmenté a été pris comme référence : l'un avec un contact de type hertz en petites déformations, l'autre en grandes déformations avec la compression d'un anneau hyperélastique contre une fondation rigide. Il en ressort que les méthodes "active set" sont plus efficaces que le Lagrangien augmenté dans le premier cas, tant en terme de vitesse de convergence et de temps CPU, mais il faut nuancer ces propos dans le cas du second exemple. Les deux méthodes de type "active set" nécessitent cette fois plus d'itérations que la méthode du Lagrangien augmenté pour atteindre la convergence. Cependant, elles restent plus rapides que ce dernier en terme de temps CPU. Quoi qu'il en soit, le fait que les méthodes de type "active set" ne requièrent pas l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange constitue un avantage non négligeable du point de vue de l'implémentation. De ce fait, nous avons toutes les raisons de penser que l'utilisation des méthodes "active set" à la place du Lagrangien augmenté se justifie pleinement.

A partir de là, quelques aspects s'inscrivant dans la continuité de ce Chapitre, et qui pourraient être considérés dans l'avenir, se dégagent de notre propos. D'un point de vue analytique, nous avons été en mesure de montrer la convergence de la méthode de projection itérative dans le cadre des petites déformations en utilisant uniquement les hypothèses nécessaires à l'existence d'une solution faible dans le même cadre. Puisque nous avons présenté un résultat d'existence en grandes déformations, basé sur plusieurs hypothèses, il serait intéressant d'utiliser ces mêmes hypothèses pour essayer de démontrer la convergence de l'algorithme en grandes déformations...Mais ce point reste à ce jour une question ouverte. Précisons que nous n'avons étudié pour l'instant que des configurations statiques sans frottement ; une perspective intéressante serait donc de considérer un problème de contact frottant avec ou sans processus d'évolution.



## Chapitre 8

# Conservation de l'énergie pour un problème de contact hyperélastique

Nous présentons dans ce qui va suivre un modèle numérique décrivant le contact dynamique avec frottement entre un corps hyperélastique et une fondation dotée de bonnes propriétés de conservation de l'énergie. Il s'agit de prendre en considération un contact modélisé par une loi de compliance normale dont la pénétration est limitée par des conditions de contraintes unilatérales avec une version de la loi de Coulomb de frottement sec pour en extraire des propriétés intéressantes de conservation de l'énergie. Nous commençons par introduire dans la section 1 un modèle spécifique de contact en adéquation avec les propriétés recherchées. Ensuite, en section 2, après avoir présenté le problème mécanique nous établissons la formulation variationnelle. La section 3 est dédiée à la discrétisation en temps et en espace ainsi qu'à l'approximation variationnelle du problème de contact hyperélastique. Après cela, dans la section 4, nous détaillons l'approche utilisée pour résoudre un tel problème tout en garantissant a priori de bonnes propriétés de conservation de l'énergie ; pour ce faire nous étudions l'évolution de l'énergie discrète inhérente à cette méthode dans le cas avec et sans frottement. Enfin, dans la section 5, nous présentons les résultats numériques obtenus avec plusieurs méthodes de type conservation de l'énergie [13, 62, 80, 81] pour deux exemples représentatifs, à savoir les impacts d'une balle élastique en petites déformations et d'un anneau hyperélastique en grandes déformations. Ce Chapitre a fait l'objet de l'article [27].



## 8.1 Un modèle spécifique de contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et frottement

Le but de cette section est de proposer d'une part un modèle de contact présentant des propriétés de conservation de l'énergie et d'autre part d'étendre le modèle au cas du frottement. Comme évoqué dans la section 3.3, l'utilisation de la condition de persistance (1.30) est particulièrement pratique pour la conservation de l'énergie ; elle suppose que les réactions normales de contact ne peuvent apparaître qu'en cas de contact persistant. Par ailleurs, l'utilisation d'une loi de condition unilatérale en vitesse aurait pour conséquence des pénétrations ; le couplage de cette loi au même instant avec une condition unilatérale en déplacement est donc incompatible. Notre objectif est alors de considérer un modèle de contact avec compliance normale et contraintes unilatérales possédant à la fois des propriétés de conservation de l'énergie intrinsèque à la pénalisation spécifique introduite en sous-section 3.3.4 tout en essayant de contrôler la pénétration avec l'utilisation d'une stratégie à deux étapes, similaire à celle présentée en sous-section 3.3.3.

$$(8.1) \quad \begin{cases} \Pi_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ u_\nu - g \leq 0, \\ (\Pi_\nu + p(u_\nu))(u_\nu - g) = 0, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

De telles conditions ont déjà été introduites dans (1.26). Pour rappel, cela revient à considérer une fondation constituée d'un matériau parfaitement rigide sur laquelle repose une couche d'aspérités déformables d'épaisseur  $g$ . Ce modèle présente deux avantages notables : l'adéquation avec les propriétés de conservation de l'énergie lors des pénétrations au cours des phases d'impact ( $-\Pi_\nu = p(u_\nu)$  pour  $0 \leq u_\nu < g$ ), d'une part, et la limitation de la pénétration dans la fondation ( $\Pi_\nu \leq 0$ ,  $u_\nu - g \leq 0$ ,  $\Pi_\nu(u_\nu - g) = 0$ ) par la prise en compte d'une contrainte unilatérale, d'autre part.

Nous nous tournons maintenant vers les conditions de frottement. Notre objectif est à présent de considérer un modèle de frottement qui dissipe de l'énergie tout en étant compatible avec les conditions de contact abordées plus haut. Ainsi, nous introduisons une version spécifique de la loi de frottement sec de Coulomb dans laquelle le seuil de frottement dépend à la fois de la pénétration pour  $0 \leq u_\nu \leq g$  et de la contrainte normale  $\Pi_\nu$ . Par conséquent, nous prenons la condition de frottement suivante :

$$(8.2) \quad \begin{cases} \|\mathbf{\Pi}_\tau\| \leq -\mu(u_\nu)\Pi_\nu & \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}, \\ -\mathbf{\Pi}_\tau = -\mu(u_\nu)\Pi_\nu \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} & \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Ici  $\mu$  désigne le coefficient de frottement et est supposé dépendre de la pénétration  $u_\nu$  tant que  $u_\nu < g$ . Lorsqu'il y a pénétration, du moment que le déplacement normal n'atteint pas la limite  $g$  (i.e.  $0 \leq u_\nu < g$ ), le contact est décrit par une condition de compliance normale associée à la loi de frottement sec de Coulomb classique avec le seuil de frottement  $\mu(u_\nu)p(u_\nu)$ . On pourra se référer à [56, 131, 136] pour plus de détails sur la condition de compliance normale associée à la loi de frottement sec de Coulomb. Après l'écrasement des aspérités, i.e. lorsque le déplacement normal atteint la limite  $g$ , la valeur de la contrainte normale est supérieure à  $p(g)$  et le frottement suit une loi de Coulomb associée au contact unilatéral, avec le seuil de frottement  $-\mu(g)\Pi_\nu$ . Notons que le seuil de frottement fait intervenir le coefficient de frottement  $\mu$  qui dépend de la profondeur de pénétration  $u_\nu$  et de la taille des aspérités  $g$ . Dans ce qui suit, nous considérons deux exemples, déjà présentés dans la sous-section 1.4.4 en petites déformations :

$$(8.3) \quad \mu_1(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \eta \leq 0, \\ \frac{\eta}{g}\mu_0 & \text{pour } \eta \in (0, g), \\ \mu_0 & \text{pour } \eta \geq g. \end{cases} \quad \mu_2(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \eta \leq 0, \\ (2 - \frac{\eta}{g})\mu_0 & \text{pour } \eta \in (0, g), \\ \mu_0 & \text{pour } \eta \geq g. \end{cases}$$

Plusieurs études expérimentales [74, 94, 95] ont déjà montré que le coefficient de frottement pouvait effectivement dépendre de la force de compression normale et de l'écrasement des aspérités. Un tel comportement s'explique par l'usure des aspérités sur la surface de contact de la fondation et du corps déformable mis en jeu.

## 8.2 Problème mécanique et formulation variationnelle

### Problème mécanique

La formulation forte du problème de contact frottant hyperélastique est la suivante.

**Problème  $\mathcal{P}_M$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ*

de contraintes  $\mathbf{II} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^d$  tels que

$$(8.4) \quad \mathbf{II}(t) = \partial_{\mathbf{F}} W(\mathbf{F}(t)) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(8.5) \quad \rho \ddot{\mathbf{u}}(t) - \text{Div } \mathbf{II}(t) - \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$(8.6) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$(8.7) \quad \mathbf{II}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$(8.8) \quad \begin{cases} u_\nu \leq g, \quad \Pi_\nu(t) + p(u_\nu(t)) \leq 0, \\ (u_\nu(t) - g)(\Pi_\nu(t) + p(u_\nu(t))) = 0 \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(8.9) \quad \begin{cases} \|\mathbf{II}_\tau(t)\| \leq -\mu(u_\nu(t))\Pi_\nu(t) & \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) = \mathbf{0}, \\ -\mathbf{II}_\tau(t) = -\mu(u_\nu(t))\Pi_\nu(t) \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)\|} & \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) \neq \mathbf{0}, \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$(8.10) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Pour rappel, l'équation (8.4) est la loi constitutive hyperélastique, introduite dans (1.55). L'équation (8.5) représente l'équation de mouvement. Les conditions (8.6) et (8.7) sont respectivement les conditions de déplacement et de traction. Ensuite, (8.10) représente les conditions initiales avec  $\mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{u}_1$  le déplacement initial et la vitesse initiale, respectivement. Enfin, les conditions (8.8) et (8.9) représentent les conditions de contact frottant. Ici, nous considérons une nouvelle fois que (8.8) constitue une loi de contact avec compliance normale et contact unilatéral dans laquelle la pénétration maximale autorisée est  $g$ . La condition (8.9) représente une version de la loi de frottement sec de Coulomb relative aux conditions de contact (8.8). Notons que la condition (8.8) est équivalente à

$$(8.11) \quad -\Pi_\nu(t) \in p(u_\nu(t)) + \partial\Psi_{(-\infty, g]}(u_\nu(t)) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

où  $\partial$  représente l'opérateur sous-différentiel au sens de l'analyse convexe et  $\Psi_A$  désigne la fonction indicatrice de l'ensemble  $A \subset \mathbb{R}$ . De même, nous constatons que la condition (8.9) est équivalente à

$$(8.12) \quad -\mathbf{II}_\tau(t) \in -\mu(u_\nu(t))\Pi_\nu(t)\partial\|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)\| \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T).$$

Dans le reste du Chapitre, nous considérerons les conditions de contact avec frottement sous forme de sous-différentielles exprimées en (8.11) et (8.12).

### Formulation variationnelle

Nous introduisons maintenant une formulation variationnelle hybride du problème  $\mathcal{P}_M$  dans laquelle les variables duales, correspondant aux multiplicateurs de Lagrange, sont liées aux forces de contact et de frottement. Dans ce cas, les multiplicateurs de Lagrange vérifient l'extension des inclusions sous-différentielles obtenues à partir des inclusions sous-différentielles ponctuelles définies dans (8.11) et (8.12). En reprenant les notations déjà adoptées dans la section 1.5, nous considérons les espaces de trace  $X_\nu = \{v_\nu|_{\Gamma_3} : \mathbf{v} \in V\}$  et  $X_\tau = \{v_\tau|_{\Gamma_3} : \mathbf{v} \in V\}$ , munis de leurs normes usuelles. Nous désignons par  $Y_\nu$  et  $Y_\tau$  les espaces duaux de  $X_\nu$  et  $X_\tau$ , respectivement et par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y_\nu, X_\nu}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y_\tau, X_\tau}$  les produits de dualités correspondants.

Afin d'établir la formulation variationnelle, nous avons besoin de notations supplémentaires. De ce fait, nous considérons la fonction  $\mathbf{f} : (0, T) \rightarrow V^*$  et l'opérateur  $A : V \rightarrow V^*$  définis par

$$(8.13) \quad \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V \times V^*} = (\mathbf{f}_0(t), \mathbf{v})_H + (\mathbf{f}_2(t), \mathbf{v})_{L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)},$$

$$(8.14) \quad \langle A\mathbf{u}(t), \mathbf{v} \rangle_{V \times V^*} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{u}(t)) : \nabla \mathbf{v} \, dx$$

pour tout  $t \in (0, T)$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et supposés suffisamment réguliers. Pour les conditions de contact, nous introduisons une fonction  $\varphi_{g\nu} : X_\nu \rightarrow (-\infty, +\infty]$  et un opérateur  $L : X_\nu \rightarrow Y_\nu$  définis par

$$\begin{aligned} \varphi_{g\nu}(v_\nu(t)) &= \int_{\Gamma_3} \Psi_{(-\infty, g]}(v_\nu(t)) \, da \quad \forall v_\nu \in X_\nu, \\ L : X_\nu &\rightarrow Y_\nu, \quad \langle Lu_\nu(t), v_\nu \rangle_{Y_\nu, X_\nu} = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t)) v_\nu \, da \quad \forall u_\nu, v_\nu \in X_\nu. \end{aligned}$$

Notons que, pour tout  $t \in (0, T)$ , la condition ponctuelle (8.11) conduit à l'inclusion sous-différentielle

$$(8.15) \quad -\Pi_\nu(t) \in \partial\varphi_{g\nu}(u_\nu(t)) + Lu_\nu(t) \quad \text{dans } Y_\nu.$$

Pour reformuler la loi de frottement, nous utilisons la fonction  $\varphi_\tau : X_\tau \rightarrow (-\infty, +\infty]$  définie en (3.33). De même, pour tout  $t \in (0, T)$ , la condition ponctuelle (8.12) conduit à l'inclusion sous-différentielle

$$(8.16) \quad -\boldsymbol{\Pi}_\tau(t) \in -\mu(u_\nu(t))\Pi_\nu(t)\partial\varphi_\tau(\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)) \quad \text{dans } Y_\tau.$$

Les inclusions (8.15) et (8.16) nécessitent l'introduction de 2 nouvelles inconnues, à savoir les multiplicateurs de Lagrange, qui représentent les contraintes normales et

tangentielles sur la surface de contact, et qui seront désignées dans ce qui suit par  $\xi_\nu$  et  $\xi_\tau$ , respectivement. Ainsi, en multipliant l'équation d'équilibre (8.5) par la fonction test  $\mathbf{v}$ , en intégrant le résultat sur  $\Omega \times (0, T)$  et en utilisant la formule de Green (2.9) ainsi que les inclusions (8.15)–(8.16), nous obtenons la formulation variationnelle hybride suivante pour le problème  $\mathcal{P}_M$ , avec trois champs inconnus.

**Problème  $\mathcal{P}_V$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ , un champ de contraintes normales  $\xi_\nu : [0, T] \rightarrow Y_\nu$  et un champ de contraintes tangentielles  $\xi_\tau : [0, T] \rightarrow Y_\tau$  tels que*

$$(8.17) \quad \begin{aligned} \langle \rho \ddot{\mathbf{u}}(t) + A\mathbf{u}(t), \mathbf{v} \rangle_{V \times V^*} &= \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V \times V^*} \\ &+ \langle \xi_\nu(t), v_\nu \rangle_{Y_\nu, X_\nu} + \langle \xi_\tau(t), v_\tau \rangle_{Y_\tau, X_\tau} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

$$(8.18) \quad -\xi_\nu(t) \in \partial \varphi_{g\nu}(u_\nu(t)) + Lu_\nu(t),$$

$$(8.19) \quad -\xi_\tau(t) \in -\mu(u_\nu(t))\xi_\nu(t)\partial \varphi_\tau(\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)),$$

pour tout  $t \in (0, T)$  et, de plus,

$$(8.20) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1.$$

Notons que l'existence et l'unicité d'une solution faible au Problème  $\mathcal{P}_V$  restent à ce jour des problèmes ouverts. Toutefois, nous avons un résultat d'unicité dans [21] pour un problème de contact avec frottement comportant une loi constitutive viscoélastique en dynamique avec une version régularisée des conditions de contact avec frottement (8.18)–(8.19), en petites déformations. Nous rappelons également que les questions de l'existence et de l'unicité d'une solution faible pour plusieurs problèmes de contact sont abordées en détail dans les ouvrages [56, 100, 136].

### 8.3 Discrétisation et approximation variationnelle

Cette section est consacrée à la discrétisation du problème variationnel  $\mathcal{P}_V$  et est basée sur des arguments similaires à ceux utilisés dans [13, 14, 20, 21, 22, 23, 28].

Intéressons nous dans un premier temps à la discrétisation spatiale. Soit  $\Omega$ , un domaine polyédrique. De plus, soit  $\{\mathcal{T}^h\}$ , une famille régulière d'éléments finis triangulaires recouvrant le domaine  $\overline{\Omega}$  et compatible avec la partition de la frontière  $\Gamma = \overline{T}_1 \cup \overline{T}_2 \cup \overline{T}_3$ . L'espace  $V$  est approché par l'espace de dimension fini  $V^h \subset V$  des

fonctions continues et affines par morceaux, déjà détaillé dans la section 7.2. Pour la discrétisation des termes associés au contact normal, nous considérons l'espace

$$X_\nu^h = \{ v_\nu^h|_{\Gamma_3} : \mathbf{v}^h \in V^h \}$$

muni de sa norme usuelle. Considérons l'espace discret des fonctions constantes par morceaux  $Y_\nu^h \subset L^2(\Gamma_3)$  liées à la discrétisation de la contrainte normale  $\xi_\nu$ . Pour la discrétisation des termes associés au frottement tangentiel, considérons l'espace

$$X_\tau^h = \{ \mathbf{v}_\tau^h|_{\Gamma_3} : \mathbf{v}^h \in V^h \}$$

muni de sa norme usuelle. Nous considérons également l'espace discret des fonctions constantes par morceaux  $Y_\tau^h \subset L^2(\Gamma_3)^d$  liées à la discrétisation de la densité de frottement  $\boldsymbol{\xi}_\tau$ .

Ensuite, nous rappelons quelques résultats préliminaires sur la discrétisation temporelle. Soit  $N$ , un entier ;  $k = \frac{T}{N}$  est le pas de temps et nous définissons

$$t_n = nk, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Par la suite, pour une fonction continue  $f(t)$  à valeur dans un espace fonctionnel, nous utilisons la notation  $f_j = f(t_j)$ , pour  $0 \leq j \leq N$ . Nous considérons alors une collection de temps discrets  $\{t_n\}_{n=0}^N$  constituant une partition uniforme de l'intervalle de temps  $[0, T] = \bigcup_{n=1}^N [t_{n-1}, t_n]$  avec  $t_0 = 0$ ,  $t_n = t_{n-1} + k$  et  $t_N = T$ . Finalement, pour une suite  $\{w_n\}_{n=1}^N$ , nous désignons les différences divisées centrées par

$$(8.21) \quad \delta w_{n-\frac{1}{2}} = (w_n - w_{n-1})/k = \frac{1}{2}(\delta w_n + \delta w_{n-1}),$$

et, de manière équivalente, nous avons  $\delta w_n = -\delta w_{n-1} + \frac{2}{k}(w_n - w_{n-1})$ . Dans le reste de ce Chapitre, nous utilisons la notation  $\square_{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\square_n + \square_{n-1})$ , où  $\square_n$  représente l'approximation de  $\square(t_n)$ . Notons que le schéma d'intégration temporelle que nous utilisons est basé sur la règle implicite des points milieux d'ordre deux donnée dans (8.21).

Avec ces conditions préliminaires, nous avons que la condition de contact (8.18) conduit à l'inclusion sous-différentielle discrète suivante, au temps  $t_{n-\frac{1}{2}}$  :

$$-\xi_{\nu_{n-\frac{1}{2}}}^{hk} \in \partial\varphi_{g\nu}(u_{\nu_{n-\frac{1}{2}}}^{hk}) + Lu_{\nu_{n-\frac{1}{2}}}^{hk} \quad \text{dans} \quad Y_\nu^h.$$

De façon similaire, notons que la condition de frottement (8.19) conduit à l'inclusion sous-différentielle discrète suivante, au temps  $t_{n-\frac{1}{2}}$

$$-\boldsymbol{\xi}_{\tau_{n-\frac{1}{2}}}^{hk} \in -\mu(u_\nu^h)\xi_{\nu_{n-\frac{1}{2}}}^{hk}\partial\varphi_\tau(\delta\mathbf{u}_{\tau_{n-\frac{1}{2}}}^{hk}) \quad \text{dans} \quad Y_\tau^h.$$

Pour plus de détails sur l'étape de discrétisation, nous pouvons nous référer à [79, 81, 143].

Soient  $\mathbf{u}_0^h \in V^h$  et  $\mathbf{u}_1^h \in V^h$ , des approximations par élément fini de  $\mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{u}_1$ , respectivement. Alors, en utilisant les notations précédentes et le schéma des points milieux (8.21), l'approximation discrète du Problème  $\mathcal{P}_V$  au temps  $t_{n-\frac{1}{2}}$  est la suivante.

**Problème  $\mathcal{P}_V^{hk}$ .** *Trouver un champ de déplacements discret  $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ , un champ de contraintes normales discret  $\xi_\nu^{hk} = \{\xi_{\nu_n}^{hk}\}_{n=0}^N \subset Y_\nu^h$  et un champ de contraintes tangentielles discret  $\xi_\tau^{hk} = \{\xi_{\tau_n}^{hk}\}_{n=0}^N \subset Y_\tau^h$  tels que, pour tout  $n = 1, \dots, N$ ,*

$$(8.22) \quad \begin{aligned} \langle \frac{\rho}{k} (\delta \mathbf{u}_n^{hk} - \delta \mathbf{u}_{n-1}^{hk}) + A \mathbf{u}_{n-\frac{1}{2}}^{hk}, \mathbf{v}^h \rangle_{V \times V^*} &= \langle \mathbf{f}_{n-\frac{1}{2}}^{hk}, \mathbf{v}^h \rangle_{V \times V^*} \\ &+ \langle \xi_{\nu_{n-\frac{1}{2}}}^{hk}, v_\nu^h \rangle_{Y_\nu^h, X_\nu^h} + \langle \xi_{\tau_{n-\frac{1}{2}}}^{hk}, v_\tau^h \rangle_{Y_\tau^h, X_\tau^h} \quad \forall \mathbf{v} \in V^h, \end{aligned}$$

$$(8.23) \quad -\xi_{\nu_{n-\frac{1}{2}}}^{hk} \in \partial \varphi_{g\nu}(u_{\nu_{n-\frac{1}{2}}}^{hk}) + L u_{\nu_{n-\frac{1}{2}}}^{hk},$$

$$(8.24) \quad -\xi_{\tau_{n-\frac{1}{2}}}^{hk} \in -\mu(u_{\nu_{n-\frac{1}{2}}}^{hk}) \xi_{\nu_{n-\frac{1}{2}}}^{hk} \partial \varphi_\tau(\delta \mathbf{u}_{\tau_{n-\frac{1}{2}}}^{hk}),$$

$$(8.25) \quad \mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_0^h, \quad \delta \mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_1^h.$$

Notons que les conditions discrètes de contact avec frottement (8.23) et (8.24) sont considérées au temps  $t_{n-\frac{1}{2}}$ . Comme expliqué dans la section 3.3, nous choisissons d'imposer les conditions de contact au temps  $t_n$ , étant donné que la solution est cherchée à cet instant. Ici, nous utilisons la méthode des différences divisées arrières implicite pour la discrétisation de la vitesse tangentielle  $\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)$  donnée par  $\delta \mathbf{u}_{\tau_n} = (\mathbf{u}_{\tau_n} - \mathbf{u}_{\tau_{n-1}})/k$ , ce qui conduit au problème discret suivant.

**Problème  $\bar{\mathcal{P}}_V^{hk}$ .** *Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ , un champ de contraintes normales discret  $\xi_\nu^{hk} = \{\xi_{\nu_n}^{hk}\}_{n=0}^N \subset Y_\nu^h$  et un champ de contraintes tangentielles discret  $\xi_\tau^{hk} = \{\xi_{\tau_n}^{hk}\}_{n=0}^N \subset Y_\tau^h$  tels que, pour tout  $n = 1, \dots, N$ ,*

$$(8.26) \quad \begin{aligned} \langle \frac{\rho}{k} (\delta \mathbf{u}_n^{hk} - \delta \mathbf{u}_{n-1}^{hk}) + A \mathbf{u}_{n-\frac{1}{2}}^{hk}, \mathbf{v}^h \rangle_{V \times V^*} &= \langle \mathbf{f}_{n-\frac{1}{2}}^{hk}, \mathbf{v}^h \rangle_{V \times V^*} \\ &+ \langle \xi_{\nu_n}^{hk}, v_\nu^h \rangle_{Y_\nu^h, X_\nu^h} + \langle \xi_{\tau_n}^{hk}, v_\tau^h \rangle_{Y_\tau^h, X_\tau^h} \quad \forall \mathbf{v} \in V^h, \end{aligned}$$

$$(8.27) \quad -\xi_{\nu_n}^{hk} \in \partial \varphi_{g\nu}(u_{\nu_n}^{hk}) + L u_{\nu_n}^{hk},$$

$$(8.28) \quad -\xi_{\tau_n}^{hk} \in -\mu(u_{\nu_n}^{hk}) \xi_{\nu_n}^{hk} \partial \varphi_\tau(\delta \mathbf{u}_{\tau_n}^{hk}),$$

$$(8.29) \quad \mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_0^h, \quad \delta \mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_1^h.$$

Notons que la discrétisation spécifiquement utilisée dans la problème  $\bar{\mathcal{P}}_V^{hk}$  représente le point de départ du développement d'un algorithme visant à contrôler la conservation de l'énergie lors de la résolution de problèmes de contact hyperélastique tout en garantissant la précision et la stabilité lors d'une intégration sur les pas de temps.

## 8.4 Une méthode de type conservation de l'énergie

Dans ce qui suit, nous présentons une méthode de type conservation de l'énergie pour les problèmes de contact hyperélastiques avec une extension aux cas des phénomènes de dissipation dûs au frottement. Cette méthode permet d'imposer les conditions spécifiques de compliance normale et de contact unilatéral à chaque pas de temps tout en assurant un contrôle des pénétrations et de bonnes propriétés de conservation de l'énergie. La stratégie développée ici est basée sur la solution du système (8.26) en tenant uniquement compte de la compliance normale avec frottement, dans la première étape, puis de la compliance normale limitée par la contrainte unilatérale avec frottement lors de la seconde étape. Cette stratégie est utilisée lorsque l'on passe de l'instant  $t_{n-1}$  à l'instant  $t_n$ . Pour ce faire, nous avons donc développé une méthode de continuation de Newton adaptée, en deux étapes, que l'on pourrait résumer ainsi :

Etape (a) : Schéma de Newton pour résoudre le système non linéaire (8.26)

$$(8.30) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} -\xi_{\nu n} = Lu_{\nu n} & \text{sur } \Gamma_3, \\ -\boldsymbol{\xi}_{\tau n} \in -\mu(u_{\nu n})\xi_{\nu n}\varphi_{\tau}(\mathbf{u}_{\tau n}) & \text{sur } \Gamma_3. \end{cases}$$

Etape (b) : Continuation du Schéma de Newton pour résoudre (8.26)

$$(8.31) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \text{si } u_{\nu n}^{(a)} < g & -\xi_{\nu n} = Lu_{\nu n} & \text{sur } \Gamma_3, \\ \text{si } u_{\nu n}^{(a)} \geq g & -\xi_{\nu n} \in \partial\varphi_{g\nu}(u_{\nu n}) + Lg & \text{sur } \Gamma_3, \\ & -\boldsymbol{\xi}_{\tau n} \in -\mu_0\xi_{\nu n}\varphi_{\tau}(\delta\mathbf{u}_{\tau n}) & \text{sur } \Gamma_3. \end{cases}$$

D'après le travail effectué en [62], nous reproduisons dans le cas discret les propriétés de conservations décrites dans la sous-section 3.3.4 en tenant compte d'une forme spécifique de la réaction normale de contact  $\xi_{\nu n}$  définie par

$$(8.32) \quad -\xi_{\nu n} = Lu_{\nu n} = rp(u_{\nu n}) \quad \text{avec} \quad p(u_{\nu n}) = \frac{[(u_{\nu n})_+]^2 - [(u_{\nu n-1})_+]^2}{2(u_{\nu n} - u_{\nu n-1})}.$$

Notons que  $p(u_{\nu n})$  représente une forme spécifique de la fonction de compliance normale à l'instant  $t_n$ . Ici,  $r$  est un paramètre de pénalisation que nous pouvons interpréter comme le coefficient de rigidité des aspérités de la fondation. Par la suite, la méthode



de continuation de Newton avec compliance normale (8.32) sera appelée "Improved Penalized Method" (IPM).

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés de conservation de l'énergie induites par cette méthode. Dans ce qui suit, les notations  $E_n$  et  $E_{n-1}$  désignent l'énergie hyperélastique du problème considéré au temps  $t_n$  et  $t_{n-1}$ , respectivement. Ainsi, l'énergie discrète  $E_n$  peut être écrite comme suit :

$$(8.33) \quad E_n = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho [\delta \mathbf{u}_n]^2 dx + \int_{\Omega} \tilde{W}(\mathbf{C}_n) dx.$$

L'estimation de l'énergie discrète du Problème de contact avec frottement  $\bar{\mathcal{P}}_V^{hk}$  entre les temps  $t_{n-1}$  et  $t_n$  est basée sur la proposition suivante.

**Proposition 8.1.**

$$(8.34) \quad \begin{aligned} E_n - E_{n-1} &= k \langle \mathbf{f}_{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{u}_{n-\frac{1}{2}} \rangle_{V \times V^*} \\ &+ k \int_{\Gamma_3} (\xi_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} + \boldsymbol{\xi}_{\tau_n} \cdot \delta \mathbf{u}_{\tau_n}) da. \end{aligned}$$

**Démonstration.** Nous utilisons la formulation variationnelle (8.26) avec

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{u}_{n-\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}}{k} = \frac{\delta \mathbf{u}_n + \delta \mathbf{u}_{n-1}}{2}.$$

Puis, nous avons recours à la forme (3.41) du tenseur de Piola-kirchhoff pour prendre en compte la conservation de l'énergie interne hyperélastique. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2k} \int_{\Omega} \rho (\delta \mathbf{u}_n - \delta \mathbf{u}_{n-1}) \cdot (\delta \mathbf{u}_n + \delta \mathbf{u}_{n-1}) dx + \frac{1}{k} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Pi}^{algo} : \nabla (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}) dx \\ &= \langle \mathbf{f}_{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{u}_{n-\frac{1}{2}} \rangle_{V \times V^*} + \int_{\Gamma_3} [\xi_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} + \boldsymbol{\xi}_{\tau_n} \cdot \delta \mathbf{u}_{\tau_n}] da. \end{aligned}$$

A présent, en utilisant l'identité

$$(\delta \mathbf{u}_n - \delta \mathbf{u}_{n-1})(\delta \mathbf{u}_n + \delta \mathbf{u}_{n-1}) = [\delta \mathbf{u}_n]^2 - [\delta \mathbf{u}_{n-1}]^2$$

et la propriété de conservation du schéma de Gonzalez donnée dans (3.42), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2k} \int_{\Omega} \rho ([\delta \mathbf{u}_n]^2 - [\delta \mathbf{u}_{n-1}]^2) dx + \frac{1}{k} \int_{\Omega} \tilde{W}(\mathbf{C}_n) - \tilde{W}(\mathbf{C}_{n-1}) dx \\ &= \langle \mathbf{f}_{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{u}_{n-\frac{1}{2}} \rangle_{V \times V^*} + \int_{\Gamma_3} [\xi_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} + \boldsymbol{\xi}_{\tau_n} \cdot \delta \mathbf{u}_{\tau_n}] da. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la définition (8.33) de l'énergie discrète nous obtenons l'identité (8.34).  $\square$

A l'aide de la Proposition 8.1, nous pouvons affirmer qu'à la fin de l'étape (a), l'estimation de l'énergie discrète pour la loi de compliance normale spécifique prend la forme suivante.

**Proposition 8.2.**

$$(8.35) \quad \begin{aligned} E_n^{(a)} - E_{n-1}^{(a)} &= \langle \mathbf{f}_{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{u}_{n-\frac{1}{2}} \rangle_{V \times V^*} \\ &- \int_{\Gamma_3} \frac{r}{2} ([ (u_{\nu_n})_+ ]^2 - [ (u_{\nu_{n-1}})_+ ]^2) da + k \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\xi}_{\tau_n} \cdot \delta \mathbf{u}_{\tau_n} da. \end{aligned}$$

**Démonstration.** Les arguments employés sont similaires à ceux utilisés pour démontrer la Proposition 8.1 ; en particulier nous utilisons l'égalité (8.32) combinée à la forme discrète implicite de la vitesse normale de contact  $\delta u_{\nu_n} = \frac{u_{\nu_n} - u_{\nu_{n-1}}}{k}$ .  $\square$

Notons que la forme de la réaction normale de contact (8.32) autorise, dans le cas sans frottement, une estimation de l'énergie en accord avec la formule (3.50). Par ailleurs, lorsque les forces extérieures ne sont pas prises en compte, les expressions de l'énergie dans les Propositions 8.1 et 8.2 pendant les étapes (a) et (b), respectivement, nous permettent d'obtenir les résultats suivants.

Cas sans frottement

$$\begin{aligned} \text{Etape (a) : } \quad \xi_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} &\approx 0 \quad \Rightarrow \quad E_n^{(a)} \approx E_{n-1}^{(a)}, \\ \text{Etape (b) : } \quad \xi_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} &\leq 0 \quad \Rightarrow \quad E_n^{(b)} \leq E_{n-1}^{(b)}. \end{aligned}$$

Cas avec frottement

$$\begin{aligned} \text{Etape (a) : } \quad \xi_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} &\approx 0, \quad \boldsymbol{\xi}_{\tau_n} \cdot \delta \mathbf{u}_{\tau_n} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad E_n^{(a)} \leq E_{n-1}^{(a)}, \\ \text{Etape (b) : } \quad \xi_{\nu_n} \delta u_{\nu_n} &\leq 0, \quad \boldsymbol{\xi}_{\tau_n} \cdot \delta \mathbf{u}_{\tau_n} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad E_n^{(b)} \leq E_{n-1}^{(b)}. \end{aligned}$$

Dans le cas sans frottement ( $\boldsymbol{\xi}_{\tau_n} = 0$ ), nous pouvons noter que lors de l'étape (a), l'énergie du système est quasiment conservée. En effet, la différence  $[ (u_{\nu_{n-1}})_+ ]^2 - [ (u_{\nu_n})_+ ]^2$  est très petite du moment que les pénétrations  $(u_{\nu_{n-1}})_+$  et  $(u_{\nu_n})_+$  sont faibles. Au cours de l'étape (b), la condition de contrainte unilatérale permet de limiter les pénétrations obtenues à l'étape (a) par la valeur  $g$ , qui est donnée et est supposée relativement faible. Par ailleurs, le produit  $\xi_{\nu_n} \delta u_{\nu_n}$  est toujours négatif ce qui n'est pas acceptable du point de vue physique dans la mesure où cela génère une dissipation de l'énergie. Cependant, cette dissipation de l'énergie est censée être faible puisque la

phase d'impact a lieu principalement lors de l'étape (a), qui possède elle de bonnes propriétés de conservation de l'énergie. Par ailleurs, lorsque le cas avec frottement est considéré, nous observons une dissipation d'énergie admissible dans les deux étapes (a) et (b). En effet, dans ce cas précis, il est facile de démontrer que le produit interne  $\boldsymbol{\xi}_{\tau_n} \cdot \delta \mathbf{u}_{\tau_n}$  est toujours négatif. En d'autres termes, une telle stratégie limite la dissipation de l'énergie entre les temps  $t_n$  et  $t_{n-1}$ , dans le cas sans frottement, et autorise la dissipation de l'énergie, dans le cas avec frottement. En résumé, les avantages de la méthode résident dans le fait que la dissipation de l'énergie et les pénétrations sont limitées lors de l'impact.

## 8.5 Simulations numériques

Afin de retrouver le comportement théorique du schéma discret abordé dans la section précédente, nous avons réalisé quelques simulations numériques sur deux problèmes "standards" de contact en dynamique : l'impact sans frottement d'une balle élastique linéaire contre une fondation et l'impact avec frottement d'un anneau hyperélastique contre une fondation.

### Impact d'une balle élastique linéaire contre une fondation

Ce problème décrit l'impact sans frottement d'une balle élastique linéaire contre une fondation (cf [79]). La balle élastique est jetée verticalement avec une vitesse initiale ( $\mathbf{u}_1 = (0, -10)m/s$ ) vers la fondation  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 0\}$ . Le comportement du matériau est décrit par une loi constitutive élastique définie par l'énergie

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{E\kappa}{2(1+\kappa)(1-2\kappa)}(tr\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \frac{E}{2(1+\kappa)}tr(\boldsymbol{\varepsilon}^2), \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{M}^n.$$

Ici  $E$  et  $\kappa$  sont, respectivement, le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau et  $tr(\cdot)$  désigne la fonction trace. Notons que  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})$  représente le tenseur des déformations linéarisées dans le cadre des petites déformations ( $\|\mathbf{u}\| \ll 1$  et  $\|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1$  dans  $\Omega$ ).

La configuration initiale est représentée à la Figure 8.1 . Ici,

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 100)^2 + (x_2 - 100)^2 \leq 100\}, \\ \Gamma_1 &= \emptyset, \quad \Gamma_2 = \emptyset, \\ \Gamma_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 100)^2 + (x_2 - 100)^2 = 100\}. \end{aligned}$$

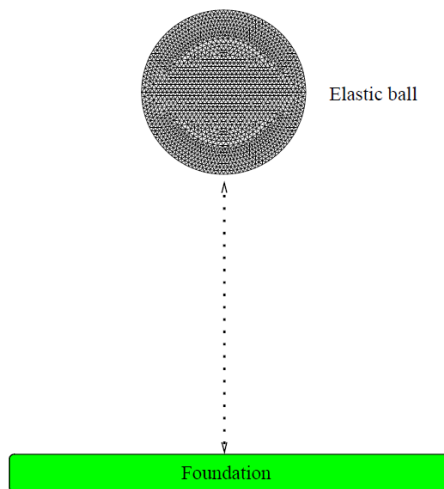


FIGURE 8.1 : Discrétisation de la balle élastique en contact avec une fondation.

Le domaine  $\Omega$  représente la coupe transversale d'une balle, sous l'hypothèse des contraintes planes. Aucune force volumique n'agit sur le corps. Pour la discrétisation de ce problème de contact nous avons recours à 7820 noeuds élastiques et 128 noeuds multiplicateurs de Lagrange. Pour la simulation numérique, nous utilisons les données suivantes :

$$\begin{aligned} \rho &= 1000 \text{ kg/m}^3, \quad T = 2 \text{ s}, \quad k = 0.001, \\ \mathbf{u}_0 &= (0, 0) \text{ m}, \quad \mathbf{u}_1 = (0, -10) \text{ m/s}, \\ E &= 100 \text{ GPa}, \quad \kappa = 0.35, \quad \mathbf{f}_0 = (0, 0) \text{ Pa}, \\ g &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad r = 1000 \text{ Pa}, \quad \mu = 0. \end{aligned}$$

Notons que nous considérons une valeur de  $g$  suffisamment petite pour limiter, voire négliger, la pénétration. Cette valeur représente 0.005% du rayon de la balle.

Dans la Figure 8.2 , nous présentons les positions successives de la balle ainsi que les forces de contact avant, pendant et après l'impact.

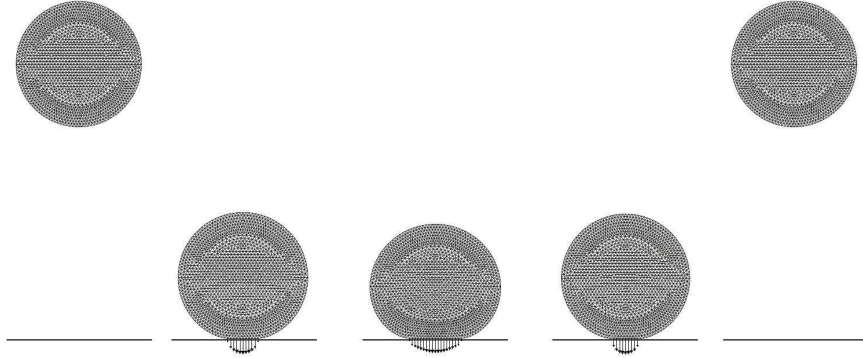


FIGURE 8.2 : Positions successives de la balle ainsi que les forces de contact avant, pendant et après l'impact.

Tout l'intérêt d'un tel exemple réside dans la comparaison des résultats numériques obtenus en utilisant le modèle de contact spécifique et la méthode de continuation, présentés dans la Section 8.4, avec ceux obtenus par l'utilisation de méthodes dites classiques (voir Section 1.5). Nous considérons donc 5 méthodes existantes :

- La solution du problème avec  $g = 0m$ , qui correspond à un schéma d'intégration d'ordre 2 (dite méthode classique) avec la condition de contact de Signorini.
- La solution pour un  $g$  élevé ( $g = 1000m$ ), qui correspond à la méthode classique avec une condition de compliance normale de la forme  $\xi_{\nu_n} = -r(u_{\nu_n})_+$ .
- La méthode de pénalisation spécifique développée dans [62] dans laquelle la condition de compliance normale est donnée par (8.32).
- La méthode "Equivalent Mass Matrix" proposée dans [79], qui représente une distribution spécifique de la matrice de masse sans inertie de la part des noeuds de contact. Cette méthode présente, en particulier, de bonnes propriétés de stabilité au niveau des forces de contact.
- La méthode de continuation de Newton développée dans [13], caractérisée par l'application de deux étapes consécutives de la loi de contact unilatéral et de la condition de persistance (1.30) lors de chaque incrément de temps.

Dans ce qui suit, nous analysons les méthodes en terme d'évolution de l'énergie discrète. Pour cela nous introduisons l'énergie discrète au temps  $t_n$ , qui est donnée par la formule suivante :

$$E_n = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_n^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_n : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n) d\mathbf{x},$$

où  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  désigne le tenseur des contraintes pour des déformations infinitésimales.

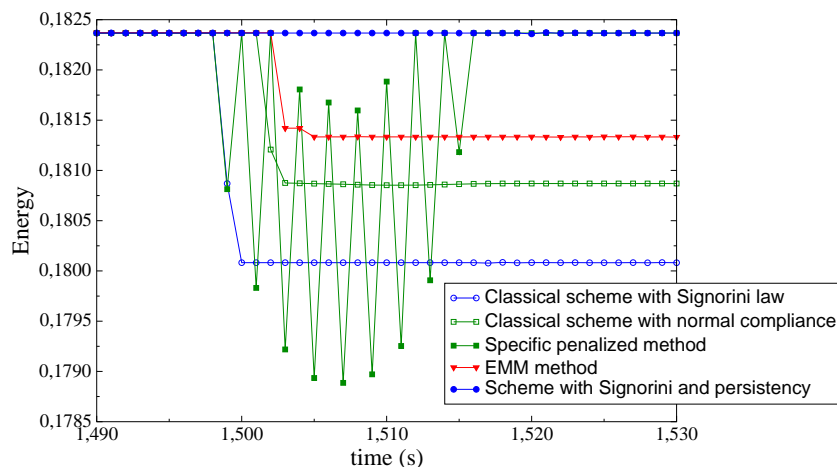


FIGURE 8.3 : Comportement de l'énergie discrète des schémas d'intégration temporelle lors de l'impact.

La figure 8.3 représente l'évolution de l'énergie discrète totale du système dynamique. Ainsi, nous sommes en mesure de constater qu'après l'impact (i.e. pour  $t \geq 1.52$ ) et avec un pas de temps  $k = 0.001$ , la méthode classique avec la loi de Signorini (symbole  $\ominus$ ) ainsi que la méthode avec la condition de compliance normale (symbole  $\boxplus$ ) ne conserve pas l'énergie, ce qui n'est pas réaliste d'un point de vue physique. Notons aussi que la méthode EMM (symbole  $\blacktriangledown$ ) réduit fortement la dissipation de l'énergie sans pour autant permettre une conservation parfaite. En outre, les schémas développés dans [13] (symbole  $\bullet$ ) ainsi que la méthode de pénalisation spécifique (symbole  $\blacksquare$ ) conservent l'énergie après l'impact. Néanmoins, pour cette dernière, quelques fluctuations de l'énergie subsistent qui finissent par disparaître après l'impact. Par ailleurs, pour cette méthode et celle utilisée dans [13], les conditions de contact unilatéral ne sont pas tout à fait satisfaites. En effet, on constate que la méthode de pénalisation spécifique génère une erreur maximale sur le déplacement normal lors du contact de  $0.0034m$ , et  $0.0051m$  pour la méthode de [13].

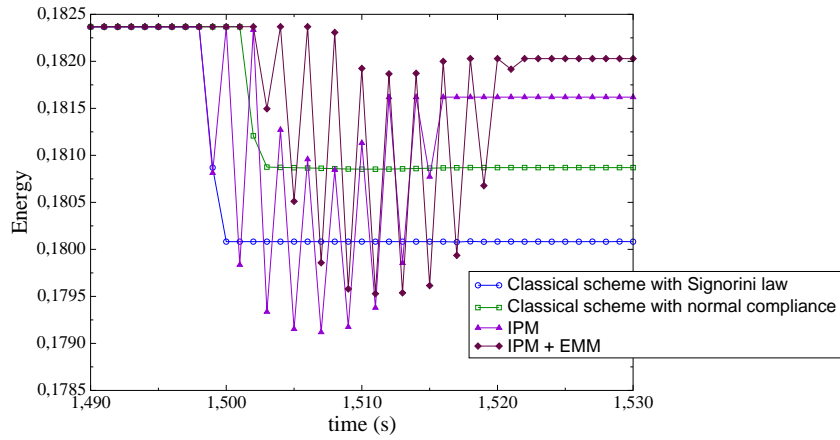


FIGURE 8.4 : Comportement de l'énergie discrète de variantes de la méthode de Pénalisation améliorée (IPM) lors de l'impact.

Afin de surmonter ces obstacles, nous considérons la méthode IPM (symbole ( $\blacktriangle$ )) basée sur une combinaison de la méthode de pénalisation spécifique et de la loi de compliance normale avec pénétration contrôlée introduites dans la Section 8.4. D'après la Figure 8.4, nous pouvons voir que la méthode en question (IPM) permet d'obtenir une meilleure conservation de l'énergie en plus de limiter la pénétration. Néanmoins, cette méthode génère encore quelques fluctuations de l'énergie discrète lors de l'impact. Pour cette raison, nous considérons une amélioration de la méthode IPM, obtenue par l'ajout de la procédure EMM (symbole ( $\blacklozenge$ )). Cette dernière stratégie (IPM + EMM) permet de conserver la quasi-totalité de l'énergie discrète et de limiter la pénétration. En effet, nous obtenons : 0.1% de dissipation et 0.005% de pénétration.

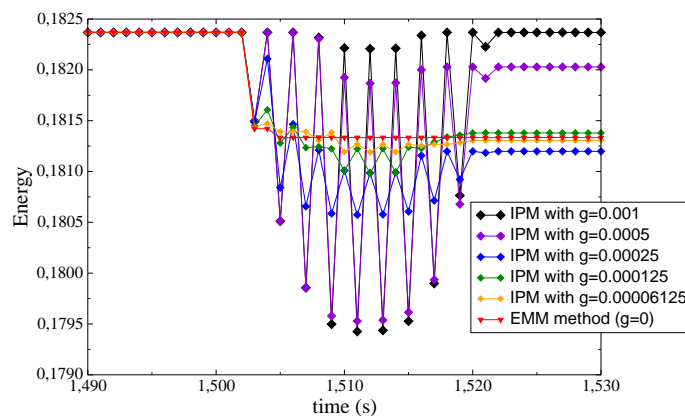


FIGURE 8.5 : Comportement de l'énergie discrète de la méthode IPM avec EMM suivant les valeurs de pénétration  $g$ .

Dans la Figure 8.5, nous analysons le comportement de l'énergie discrète de la combinaison des méthodes IPM et EMM en fonction de la valeur de pénétration  $g$ . Pour  $g = 0.001$ , la combinaison IPM et EMM produit le même résultat que la méthode de pénalisation spécifique avec EMM ; cela vient du fait que tous les noeuds sont en statut de compliance normale sans atteindre la limite  $g$ . Nous pouvons également remarquer que les résultats numériques obtenus en utilisant la combinaison des méthodes IPM et EMM sont similaires aux résultats numériques obtenus en utilisant la méthode EMM, lorsque  $g$  tend vers zero.

## Impact d'un anneau hyperélastique contre une fondation

Afin de mettre en lumière le comportement conservatif ou dissipatif de la méthode dans le cas hyperélastique, nous considérons une seconde application, introduite dans [88]. Cette application concerne un problème académique d'impact avec frottement pour un matériau dont le comportement est hyperélastique, à savoir l'impact avec frottement d'un anneau contre une fondation. Le comportement du matériau, considéré ici, est gouverné par une loi constitutive de Ogden déjà évoquée dans (1.63) et définie par la densité d'énergie

$$W(\mathbf{C}) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + a(I_3 - 1) - (C_1 + 2C_2 + a) \ln I_3.$$

Ici  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  représentent les trois invariants du tenseur  $\mathbf{C}$ . Cet exemple nous permet d'évaluer les performances des méthodes et de juger de leur caractère conservatif ou dissipatif. Nous avons comparé la méthode IPM avec plusieurs schémas d'intégration



temporelle possédant de bonnes propriétés de conservation de l'énergie. Les détails sur la configuration initiale du problème sont donnés ci-dessous :

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 81 \leq (x_1 - 100)^2 + (x_2 - 100)^2 \leq 100\}, \\ \Gamma_1 &= \emptyset, \quad \Gamma_2 = \emptyset, \\ \Gamma_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 100)^2 + (x_2 - 100)^2 = 100\}.\end{aligned}$$

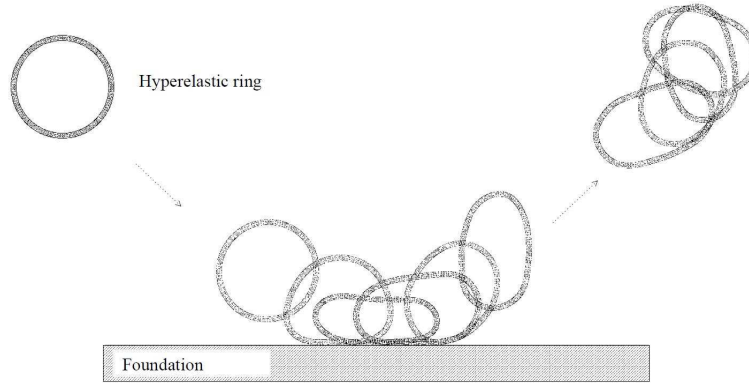


FIGURE 8.6 : Positions successives de l'anneau hyperélastique déformé avant, pendant et après l'impact.

En ce qui concerne le premier exemple numérique, le domaine  $\Omega$  représente la coupe transversale d'un corps déformable en trois dimensions sous l'hypothèse des contraintes planes. L'anneau élastique est lancé avec une vitesse initiale en formant un angle de  $45^\circ$  avec la fondation comme illustré dans la Figure 8.6 . La fondation est donnée par  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 0\}$ . Pour la discrétisation, nous utilisons 1664 noeuds élastiques et 128 noeuds multiplicateurs de Lagrange. Pour les simulations numériques, nous avons pris les données suivantes

$$\begin{aligned}\rho &= 1000 \text{ kg/m}^3, \quad T = 10 \text{ s}, \quad k = \frac{1}{300}, \\ \mathbf{u}_0 &= (0, 0) \text{ m}, \quad \mathbf{u}_1 = (10, -10) \text{ m/s}, \\ c_1 &= 0.5 \text{ MPa}, \quad c_2 = 0.5 \times 10^{-2} \text{ MPa}, \quad a = 0.35 \text{ MPa}, \\ g &= 0.002 \text{ m}, \quad r = 1000 \text{ Pa}, \quad \mu_0 = 0.2.\end{aligned}$$

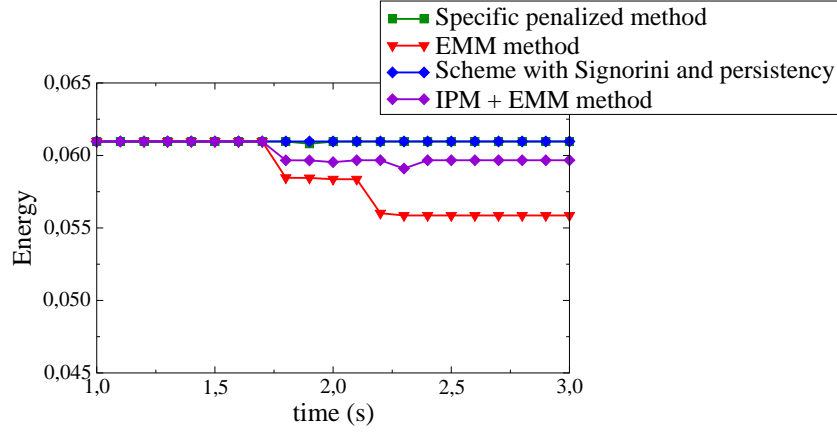


FIGURE 8.7 : Comportement de l'énergie discrète des schémas d'intégration temporelle choisis lors de l'impact (cas sans frottement).

Dans la Figure 8.7, nous présentons l'évolution de l'énergie discrète totale du système dynamique sans frottement pour certains schémas d'intégration temporelle considérés dans l'exemple numérique précédent, i.e. la méthode de pénalisation spécifique (symbole (■)), la méthode EMM (symbole ▼), le schéma développé dans [13] (symbole (●)) ainsi que la combinaison des méthodes IPM et EMM (symbole (◆)). Considérons l'énergie discrète au temps  $t_n$  définie comme suit,

$$E_n = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_n^2 dx + \int_{\Omega} \tilde{W}(\mathbf{C}_n) dx.$$

Dans la configuration sans frottement (cf Figure 8.7), nous constatons que la méthode IPM réduit la dissipation par rapport à la procédure EMM. D'autre part, une telle méthode se caractérise par de petites pénétrations (puisque limitées à  $g = 0.002m$ ). En revanche, la méthode de pénalisation spécifique et la méthode présentée dans [13] produisent une erreur maximale non négligeable sur la composante normale du déplacement lors du contact ( $0.058m$ , et  $0.071m$ , respectivement, soit 30 à 35 fois supérieures à celle obtenue via la méthode IPM).

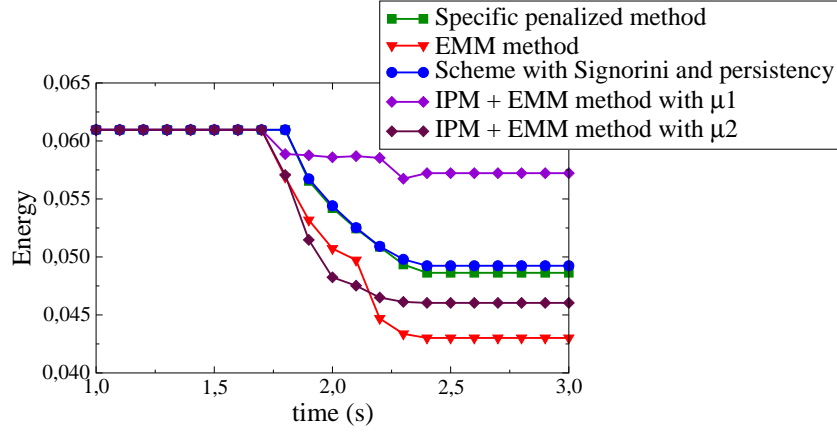


FIGURE 8.8 : Comportement de l'énergie discrète de plusieurs schémas d'intégration temporelle lors de l'impact avec frottement.

Dans la configuration avec frottement, nous considérons les deux cas abordés en (8.3) pour le coefficient de frottement  $\mu$  permettant de définir les seuils du frottement  $-\mu(u_\nu)\Pi_\nu$  de la loi de frottement (8.2). Notons déjà que lors de l'écrasement des aspérités, i.e.  $0 \leq u_\nu < g$ , le frottement suit une loi de Coulomb associée à la loi de compliance normale, et de ce fait, le seuil de frottement est égal à  $\mu(u_\nu)p(u_\nu)$ . Dans les simulations numériques, nous considérons les deux exemples de fonction  $\mu$  donnée dans (8.3). Notons que la fonction décroissante  $\mu_2(\cdot)$  prend des valeurs plus grandes que celles de la fonction croissante  $\mu_1(\cdot)$  pour une même pénétration  $u_\nu$  telle que  $0 < u_\nu < g$ . D'après la Figure 8.8, l'utilisation de la fonction  $\mu_1$  permet de limiter la dissipation de l'énergie induite par le frottement alors que la fonction  $\mu_2$  génère une forte dissipation d'énergie. En conclusion, la méthode IPM couplée avec EMM autorise une dissipation de l'énergie en adéquation avec la physique que nous souhaitons considérer durant l'écrasement des aspérités de la surface de contact. Cela semble être raisonnable d'un point de vue physique, du fait des phénomènes complexes qui interviennent pendant l'écrasement et l'usure des aspérités. Notons que la modélisation numérique des surfaces de contact avec aspérités était l'une des préoccupations de cette étude.

# Conclusion

Au cours de cette thèse, nous avons été amenés à étudier quelques problèmes de contact entre un corps déformable et une fondation rigide ou déformable, avec ou sans frottement, d'un point de vue théorique et numérique.

En particulier, après une première partie dédiée à l'introduction du cadre physique, mathématique et numérique, la deuxième partie était consacrée à la modélisation, l'analyse mathématique et l'obtention de simulations numériques de trois problèmes de contact en petites déformations. Les problèmes étudiés sont respectivement : un problème élastique en statique avec compliance normale, contrainte unilatérale et frottement non-monotone, un problème de contact viscoélastique avec terme mémoire en quasistatique avec réponse normale amortie, contrainte unilatérale en vitesse et frottement et un problème viscoélastique en dynamique avec compliance normale et frottement non-monotone. Pour chacun d'entre eux, une fois la formulation forte établie, nous avons mis en évidence l'existence et/ou l'unicité d'une solution faible au problème sous certaines hypothèses, estimé l'erreur de discrétisation, inhérente à la méthode des éléments finis et à l'éventuel caractère évolutif du problème, et obtenu des simulations numériques de ces problèmes afin de valider les résultats théoriques démontrés auparavant et d'illustrer les propriétés physiques du modèle considéré. Plus spécifiquement, en complément, nous avons étudié dans le premier problème une formulation duale, que nous avons mise en parallèle avec la formulation primale obtenue dans un premier temps. Enfin, nous avons également fournis un résultat de convergence portant sur la dépendance de la solution faible par rapport aux perturbations des données dans les Chapitres 4 et 5.

La troisième partie est un peu plus en marge de la précédente dans la mesure où l'on s'intéresse au cadre des grandes déformations, pour lequel les résultats d'existence et d'unicité ne sont pas légions à l'heure actuelle. De ce fait, nous nous intéressons plus particulièrement aux méthodes numériques utilisées pour résoudre de tels problèmes. Nous présentons dans le Chapitre 7 une nouvelle méthode de type "active set"

(méthode de projection), basée sur la reformulation de la condition de contact conduisant à une équation de point fixe via un schéma implicite, appliquée au problème de Signorini. Nous avons également été en mesure de démontrer la convergence dudit schéma sous des hypothèses très peu restrictives (coercivité de l'opérateur d'élasticité en petites déformations). Dans le reste du Chapitre, nous avons mené une étude comparative entre la méthode de projection, la méthode "Primal dual active set" et la méthode du Lagrangien augmenté, ce dernier faisant office de méthode de référence, sur deux cas tests en petites et grandes déformations. Les résultats obtenus à l'issue de cette étude sont pour le moins très encourageants ; il en ressort que la méthode de projection est aussi consistante que la méthode du Lagrangien augmenté, plus facile à implémenter et, surtout, bien plus rapide que cette dernière en terme de temps CPU. Le dernier Chapitre concerne une méthode de conservation de l'énergie, basée sur une continuation de Newton adaptée en deux étapes, que nous comparons aux autres méthodes introduites dans le Chapitre 3 en petites et grandes déformations, avec et sans frottement. Pour ce faire, nous avons considéré un modèle en dynamique dans lequel le contact est régi par une loi de compliance normale couplée aux conditions de Signorini avec un frottement potentiellement non monotone. Nous avons ensuite procédé à une analyse comparative de cette stratégie de continuation d'un point de vue énergétique par rapport aux méthodes EMM et IPM sur deux cas tests en petites et grandes déformations, avec et sans frottement. Il en ressort que la stratégie implémentée dispose de bonnes propriétés de conservation de l'énergie lors de l'impact sans frottement et qu'elle dissipe de l'énergie dans les cas avec frottement, comportement que l'on est en droit d'attendre compte tenu du caractère dissipatif du frottement.

Dans la continuité du travail d'analyse proposé dans la partie II, il pourrait être intéressant de considérer d'autres conditions visant à modéliser des problèmes plus complexes. A ce titre, on peut raisonnablement envisager que le contact s'accompagne de phénomènes d'usure des matériaux ou que la dissipation d'énergie due au frottement pourrait se traduire par l'échauffement du matériau, conduisant ainsi à la dilatation thermique du corps à la frontière de contact. Comme nous l'avons évoqué en introduction, la théorie mathématique de la mécanique du contact est un domaine d'étude relativement jeune ; de ce fait il est encore possible de décrire, modéliser, étudier et analyser un nombre considérable de phénomènes physiques intervenant dans la vie de tous les jours. Les méthodes numériques ne sont pas non plus en reste. Nous avons ici proposé une méthode de type "active set" plutôt efficace mais son domaine d'utilisation est, pour l'instant, limité aux problèmes de contact unilatéraux. Il serait no-

tamment intéressant d'analyser le comportement des méthodes de type "active set" en terme de conservation de l'énergie pour la résolution des problèmes élastodynamiques avec contact. Par ailleurs, un champ d'application non encore étudié, pour l'utilisation des méthodes "active set" pourrait être le traitement numérique des problèmes issues des milieux granulaires qui sont principalement résolus par la méthode "Non Smooth Contact Dynamic" [77, 107]. Il pourrait également être intéressant d'étendre cette méthode aux autres problèmes faisant appel aux lois de contact utilisées tout au long du manuscrit, par la suite. Mais ceci est une autre histoire.



# Bibliographie

- [1] S. Abide, M. Barboteu & D. Danan, Analysis of two active set type methods to solve unilateral contact problem, *Journal of Applied Mathematics and Computation*, doi :10.1016/j.amc.2016.03.012.
- [2] S. Abide, M. S. Binous & B. Zeghmami , A model for unsteady heat transfer in domains bounded by a thin PCM layer, soumis à *Applied Mathematics Modeling*.
- [3] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1975).
- [4] P. Alart, Méthode de Newton Généralisée en mécanique du contact, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol **76** (1997), 83–108.
- [5] P. Alart & M. Barboteu, Element de contact, méthode de Newton généralisé et décomposition de domaine, *Modélisation mathématique et numérique des problèmes avec frottement*, Problèmes non linéaires appliqués (1999), support de cours INRIA, 157–220.
- [6] P. Alart & A. Curnier, A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods, *Comput. Meth. Appl. Mech., Engrg.* **92** (1991), 353–375.
- [7] P. Alart & A. Curnier, A generalized Newton method for contact problems with friction, *Numerical Methods in Mechanics of Contact involving Friction*, (1988), 67–82.
- [8] P. Alart, M. Barboteu & F. Lebon, A modified EBE preconditioner for elastostatic, *J. Appl. Mech.*, **65-2** (1998), 531–533.
- [9] P. Alart & F. Lebon, Solution of frictional contact problems using ILU and coarse/fine preconditioners, *Computational Mechanics*, **16** (1995), 98–105.
- [10] P. Alart, F. Lebon, F. Quittau & K. Rey, Frictional Contact Problem in Elastostatics : Revisiting the Uniqueness Condition Proceeding of 2nd Contact Mechanics International Symposium, 94, Carry Le Rouet (1994), 63–70.



- [11] F. Armero & E. Petocz, Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **158** (1998), 269–300.
- [12] F. Armero & I. Romero, On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part II : second-order methods. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **190** (2001), 6783–6824.
- [13] Y. Ayyad & M. Barboteu, Formulation and analysis of two energy-consistent methods for nonlinear elastodynamic frictional contact problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **228** (2009), 254–269.
- [14] Y. Ayyad, M. Barboteu & J.R. Fernández, A frictionless viscoelastodynamic contact problem with energy-consistent properties : Numerical analysis and computational aspects, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **198**, Issues 5-8, 15 (2009), 669–679.
- [15] B. Awbi, El H. Essoufi & M. Sofonea, A viscoelastic contact problem with normal damped response and friction, *Annales Polonici Mathematici* LXXV (2000), 233–246.
- [16] H.T. Banks, G.A. Pinter, L.K. Potter, J.M. Gaitens & L.C. Yanyo, Modeling of quasistatic and dynamic load responses of filled viscoelastic materials, Chapter 11 in *Mathematical Modeling : Case Studies from Industry*, E. Cumberbatch and A. Fitt, Eds., Cambridge University Press 2011, 229–252.
- [17] H.T. Banks, G.A. Pinter, L.K. Potter, B.C. Munoz & L.C. Yanyo, Estimation and control related issues in smart material structure and fluids, *Optimization Techniques and Applications*, L. Caccetta et al., Eds., Curtin University Press 1998, 19–34.
- [18] M. Barboteu, K. Bartosz & D. Danan, Analysis of a dynamic contact problem with nonmonotone friction and non clamped boundary conditions, soumis à IMA Journal of Numerical Analysis.
- [19] M. Barboteu, K. Bartosz, W. Han & T. Janiczko, Numerical analysis of a hyperbolic hemivariational inequality arising in dynamic contact, *SIAM J. Numer. Anal.*, **53**(1) (2015), 527-550.
- [20] M. Barboteu, K. Bartosz & P. Kalita, An analytical and numerical approach to a bilateral contact problem with nonmonotone friction, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, **23** (2013), 263-276.

- [21] M. Barboteu, K. Bartosz & P. Kalita, A dynamic viscoelastic contact problem with normal compliance, finite penetration and nonmonotone slip rate dependent friction, *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, Volume **22** (2015), 452-472.
- [22] M. Barboteu, K. Bartosz, P. Kalita & A. Ramadan, Analysis of a contact problem with normal compliance, finite penetration and nonmonotone slip dependent friction, *Communications in Contemporary Mathematics* **16** (2013), 1-29.
- [23] M. Barboteu, X.L. Cheng & M. Sofonea, Analysis of a contact problem with unilateral constraint and slip-dependent friction, *Mathematics and Mechanics of Solids*, (2014), DOI :10.1177/1081286514537289.
- [24] M. Barboteu & D. Danan, Analysis of a dynamic viscoelastic contact problem with normal compliance, normal damped response and non-monotone slip rate dependent friction, soumis à *Advances in Mathematical Physics*.
- [25] M. Barboteu, D. Danan & M. Sofonea, Modelling and numerical simulation of a unilateral contact problem with slip-dependent friction, *Machine Dynamics Research*, **13** (2013), 15–26.
- [26] M. Barboteu, D. Danan & M. Sofonea, Analysis of a contact problem with normal damped response and unilateral constraint, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, (2015), 408–428.
- [27] M. Barboteu, D. Danan & M. Sofonea, *A Hyperelastic Dynamic Frictional Contact Model with Energy-Consistent Properties*, Springer International Publishing Switzerland 2015 W. Han et al. (eds.), *Advances in Variational and Hemivariational Inequalities with Applications*, *Advances in Mechanics and Mathematics* 33, 249–275.
- [28] M. Barboteu, A. Matei & M. Sofonea, Analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with normal compliance, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **65** (2012), 555–579.
- [29] M. Barboteu, A. Matei & M. Sofonea, On the behavior of the solution of a viscoelastic contact problem, *Quarterly of Applied Mathematics*, **72(4)**, (2014), 625–647.
- [30] F. Ben Belgacem, P. Hild & P. Laborde, Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **9**(1999), 287–303.
- [31] F. Ben Belgacem & Y. Renard, Hybrid finite element methods for the Signorini problem, *Mathematics of Computation*, **72**(243) (2003), 1117-1145.

- [32] P. Bisegna, F. Lebon, F. Maceri, Relaxation procedures for solving Signorini-Coulomb contact problems, *Advances in Engineering Software*, Vol **35** (2004), 595–600.
- [33] P. Boieri, F. Gastaldi & D. Kinderlehrer, Existence, Uniqueness, and Regularity Results for the Two-Body Contact Problem. *Applied Mathematics and Optimization*, **15** (1987), 251–277.
- [34] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, (1987).
- [35] O.M. Braun & M. Peyrard, Dependence of kinetic friction on velocity : Master equation approach, *Physical Review E : Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* **83** (2011), 046129-1-9.
- [36] M. Campillo, I.R. Ionescu, J.C. Paumier & Y. Renard, On the dynamic sliding with friction of a rigid block and of an infinite elastic slab, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **96** (1996), 15–23.
- [37] S. K. Chan & A. Seireg. A finite element method for contact problems of solid bodies-Part I. Theory and validation. *International Journal of Mechanical Sciences*, **13**(7) (1971), 615–625.
- [38] F. Chouly, An adaptation of Nitsche’s method to the Tresca friction problem. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. **411** (2014), 329–339.
- [39] F. Chouly & P. Hild, A Nitsche-base method for unilateral contact problems : numerical analysis, *SIAM J. Numer. Anal.*, **51**(2) (2012), 1295–1307.
- [40] F. Chouly & P. Hild, On convergence of the penalty method for unilateral contact problems. *Appl. Num. Math.*, Vol. **65** (2013), 27–40.
- [41] F. Chouly, P. Hild & Y. Renard. A Nitsche finite element method for dynamic contact : 1. Semi-discrete problem analysis and time-marching schemes, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **49** (2015), 481–502.
- [42] F. Chouly, P. Hild & Y. Renard, Symmetric and non-symmetric variants of Nitsche’s method for contact problems in elasticity : theory and numerical experiments, *Math. Comp.*, **84** (2015), 1089–1112.
- [43] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [44] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol. I : Three-Dimensional Elasticity*, Series Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland, Amsterdam, 1988.

- [45] P.G. Ciarlet & G. Geymonat, Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire compressible, *C. R. Acad. Sci.*, **295(I)** (1982), 423–426.
- [46] F.H. Clarke Optimization and non smooth analysis, *Wiley*, 1<sup>e</sup> éd. (1982).
- [47] T. F. Conry & A. Seireg. A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact. *J. Appl. Mech.*, **38(2)** (1971), 387–392.
- [48] C. Corduneanu, Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra, *Ann. Math. Pure Appl.* **67** (1965), 349–363.
- [49] C.-A. Coulomb, Théorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages, *Prix double Acad. Sci.*, 1781. Mémoires Savants Etrang. X, 1785 (reprinted by Bachelier, Paris 1809), 163–332.
- [50] R. Dautray & J. L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Vol. 8. INSTN : Collection Enseignement. [INSTM :Teaching Collection]. Masson, Paris, 1988. Evolution : numérique, transport. [Evolution : numerical methods, transport], reprint of the 1985 edition.
- [51] Z. Denkowski, S. Migórski & N.S. Papageorgiou, *An Introduction to Nonlinear Analysis : Theory*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, Boston, Dordrecht, London, New York, 2003.
- [52] G. Duvaut & J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod (1972).
- [53] C. Eck, J. Jarušek & M. Krbec, *Unilateral Contact Problems : Variational Methods and Existence Theorems*, Pure and Applied Mathematics **270**, Chapman/CRC Press, New York, 2005.
- [54] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, Memorie della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, **87** (2) (1964), 91–140.
- [55] O. Gonzalez, Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in non linear elasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **190** (2000), 1763–1783.
- [56] W. Han & M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society–International Press, 2002.
- [57] J. Haslinger & I. Hlaváček, *Numerical Methods for Unilateral Problems in Solid Mechanics*, in Handbook of Numerical Analysis, J.-L. Lions and P. Ciarlet, eds., Vol IV, North-Holland, Amsterdam, 1996, 313–485.

- [58] J. Haslinger, I. Hlaváček & J. Nečas, Contact between two elastic bodies - I. continuous problems, *Aplikace Matematiky*, **25** (1980), 324–347.
- [59] J. Haslinger, M. Miettinen & P.D. Panagiotopoulos, *Finite Element Method for Hemivariational Inequalities. Theory, Methods and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 1999.
- [60] P. Hauret, Numerical methods for the dynamic analysis of two-scale incompressible nonlinear structures. PhD Thesis, Ecole Polytechnique, France, 2004.
- [61] P. Hauret, Mixed Interpretation and Extensions of the Equivalent Mass Matrix Approach for Elastodynamics with Contact, *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* **199** (45-48) (2010), 2941–2957.
- [62] P. Hauret & P. Le Tallec, Energy-controlling time integration methods for nonlinear elastodynamics and low-velocity impact, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **195** (2006), 4890–4916.
- [63] P. Hauret, J. Salomon, A. Weiss & B. Wohlmuth, Energy Consistent Co-Rotational Schemes for Frictional Contact Problems, Cahiers du CEREMADE, preprint 2007-12, *SIAM J. Scientific Computing*, **30** (5) (2008), 2488–2511.
- [64] H. Hertz, Über die Berührung fester elastischer Körper, Journal für reine und angewandt Mathematik, **92**, 1881, 156–171.
- [65] H. Hilber, T. Hughes & R. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earth. Engrg. Struc. Dyna.* **5** (1977), 283–292.
- [66] P. Hild, An example of nonuniqueness for the continuous static unilateral contact model with coulomb friction. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 337 (2003), 685–688.
- [67] P. Hild, Non-unique slipping in the Coulomb friction model in two-dimensional linear elasticity. *Quart J. Mech. Appl. Math*, 57 (2004), 235–245.
- [68] M. Hintermuller, K. Ito & K. Kunish. The primal dual active set strategy as a semismooth Newton Method, *Siam J Optim*, **13**, 2002, 865–888.
- [69] M. Hintermuller, V. Kovtunencko & K. Kunish. Semismooth Newton methods for a class of unilaterally constrained variational problems, Technical Report 270, Technische Universitat Graz, May 2003, Sonderforschungsbereich F 003.
- [70] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas & J. Lovíšek, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.

- [71] S. Hueber & B.I. Wohlmuth, A primal dual active set strategy for non-linear multibody contact problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, Issues 27-29 (22 July 2005), 3147–3166.
- [72] S. Hueber, G. Stadler & B.I. Wohlmuth, A primal dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with coulomb friction, *SIAM J. Sci. Comput.*, **30**(2) (14 February 2008), 572–596.
- [73] T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, J. L. Sackman, A. Curnier & W. Kanoknukulchai. A finite element method for a class of contact-impact-problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **8**(3) (1976), 249–276.
- [74] I.-H. Hwang, Y.-G. Lee & J.-H. Lee, A micromachined friction meter for silicon sidewalls with consideration of contact surface shape, *J. Micromech. Microeng.* **16** (2006), 2475–2481.
- [75] J. Jarusek & C. Eck, *Dynamic contact problems with small coulomb friction for viscoelastic bodies*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **9**, Issue 01, (1999).
- [76] J. Jarušek & M. Sofonea, On the solvability of dynamic elastic-visco-plastic contact problems, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **88** (2008), 3–22.
- [77] M. Jean, The non-smooth contact dynamics method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **177** (1999), 235–257.
- [78] F. Jourdan, P. Alart & M. Jean, A Gauss-Seidel like algorithm to solve frictional contact problems, *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering* **155** (2000), 31–47.
- [79] H.B. Khenous, P. Laborde & Y. Renard, On the discretization of contact problems in elastodynamics, *Lecture Notes in Applied Computational Mechanics* **27** (2006), 31–38.
- [80] H.B. Khenous, P. Laborde & Y. Renard, Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics, *Eur. J. Mech., A/Solids* **27**(5) (2008), 918–932.
- [81] H.B. Khenous, J. Pommier & Y. Renard, Hybrid discretization of the Signorini problem with Coulomb friction. Theoretical aspects and comparison of some numerical solvers, *Applied Numerical Mathematics* **56** (2006), 163–192.
- [82] N. Kikuchi & J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.

- [83] A. Klarbring, Examples of non-uniqueness and non-existence of solutions to quasi-static contact problems with friction, *Ingenieur-Archiv* **60** (1990) 529–541.
- [84] A. D. Kudawoo, F. Lebon, M. Abbas, T. De-Soza & I. Rosu, Etude de la robustesse d'un algorithme basé sur le lagrangien stabilisé pour la résolution des problèmes de contact et de frottement, 10 ème Colloque national de calcul des structures, 2011, hal-00592780 , May 2011, Giens, France.
- [85] A. D. Kudawoo, Problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique du contact : performance, fiabilité et robustesse. PhD Thesis 2012, Université d'Aix-Marseille.
- [86] F. Kuss, F. Lebon, Stress based finite element methods for solving contact problems : Comparisons between various solution methods, *Advances in Engineering Software*, vol. **40** (2009), 697–706.
- [87] F. Kuss, F. Lebon, Error estimation and mesh adaptation for Signorini-Coulomb problems using E-FEM, *Computers and Structures*, vol. **89** (2011), 1148–1154.
- [88] T. Laursen, *Computational Contact and Impact Mechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [89] T. Laursen & V. Chawla, Design of energy-conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems, *Int. J. Num. Meth. Engrg.* **40** (1997), 863–886.
- [90] T. Laursen & G. Love, Improved implicit integrators for transient impact problems : dynamic frictional dissipation within an admissible conserving framework, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **192** (2003), 2223–2248.
- [91] F. Lebon, Contact problems with friction : models and simulations, *Simulation Modelling practice and theory*, **11** (2003), 449–463.
- [92] F. Lebon, Formulation en contraintes pour le contact frottant. Innovations in Mechanics and in Civil Engineering A scientific meeting in honour of Franco Maceri in celebration of his 70th birthday, Jun 2013, Amboise, France.
- [93] C. E. Lemke, A survey of complementary theory, *Variational Inequalities and Complementary Problems*, Eds Cottle-Gianessi-Lions, John Wiley, New York (1980), 213–235.
- [94] H. Lemu & T. Trzecieński, Numerical and Experimental Study of Frictional Behavior in Bending Under Tension Test, *Journal of Mechanical Engineering*, **59** (2013), 41–49.
- [95] B. Len, P. Ara & Z. Yun, Physics of the Coefficient of Friction in CMP, *Transactions on electrical and electronic materials*, ISSN :1229-7607, **8** NO.2 (2007), 79–83.

- [96] P. Le Tallec, Numerical methods for nonlinear three-dimensional elasticity, *Handbook of numerical analysis*, ed. P.G. Ciarlet and J.L.Lions, **III** (1994), 465–625.
- [97] J. A. C. Martins & J. T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 11 (1987), 407–428.
- [98] J. A. C. Martins, Manuel D. P. Monteiro Marques & F. Gastaldi. On an example of nonexistence of solution to a quasistatic frictional contact problem. *European J. Mech. A Solids*, **13**(1) (1994), 113–133.
- [99] J. J. Massera & J. J. Schäffer, *Linear Differential Equations and Function Spaces*, Academic Press, New York-London, 1966.
- [100] S. Migórski, A. Ochal & M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **26**, Springer, New York, 2013.
- [101] E. S. Mistakidis & P. D. Panagiotopoulos, Numerical treatment of problems involving nonmonotone boundary or stress-strain laws, *Computers and Structures* **64** (1997), 553–565.
- [102] E. S. Mistakidis & P. D. Panagiotopoulos, The search for substationary points in the unilateral contact problems with nonmonotone friction, *Math. Comput. Modelling* **28** (1998), 341–358.
- [103] J.J.Moreau, Application of convex analysis to some problems of dry friction, *Trends of Pure Mathematics Applied to Mechanics*, Zorski ed., 1979.
- [104] J.J. Moreau, Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics, Vol. 302 of International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures (Springer, Vienna, 1988), 1–82.
- [105] J.J. Moreau, Numerical aspects of the sweeping process, *Comput. Methods Appl. Engrg.*, **177** (1999), 329–349.
- [106] J.J. Moreau, On unilateral constraints, friction and plasticity. In : G. Capriz and G. Stampacchia, eds., *New Variational Techniques in Mathematical Physics* (C.I.M.E. II ciclo 1973, Edizioni Cremonese, Roma, 1974) 173–322.
- [107] J.J Moreau, Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials, *European Journal of Mechanics - A/Solids* **13** (1994), 93–114.
- [108] J.J Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire Jean Leray (1966-1967).



- [109] J. Nečas & I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies*, An Introduction, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1981.
- [110] J. Nečas, J. Jarušek & J. Haslinger, On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 5 (**17-B**) (1980), 796–811.
- [111] J. T. Oden & J. A. C. Martins, Models and Computational methods for dynamic friction phenomena, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **52** (1985), 527–634.
- [112] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [113] P. D. Panagiotopoulos, A nonlinear programming approach to the unilateral contact, and friction boundary value problem in the theory of elasticity. *Ingenieur-Archiv*, 44 (1975), Issue **6**, 421–432.
- [114] E. Rabinowicz, The nature of the static and kinetic coefficients of friction, *Journal of Applied Physics*, **22** (1951), 1373–1379.
- [115] E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, John Wiley & Sons (1995).
- [116] E. Rabinowicz & Masaya Imai, Friction and wear at elevated temperature, *Technical documentary report No. WADC-TR-59-603 part IV*, March 1963.
- [117] M. Raous, Quasistatic Signorini Problem with Coulomb Friction, *New developments in contact mechanics*, Springer-Verlag, CISM courses édité par P. Wriggers, P. Panagiotopoulos, **384** (1999).
- [118] M. Raous, Modèles constitutifs pour le contact, *Modélisation mathématique et numérique des problèmes avec frottement*, Problèmes non linéaires appliqués (1999), support de cours INRIA, 43–66.
- [119] M. Raous, Méthodes de résolution numérique, *Modélisation mathématique et numérique des problèmes avec frottement*, Problèmes non linéaires appliqués (1999), support de cours INRIA, 79–104.
- [120] M. Raous, Comparaison de méthodes, identification de paramètres, extension du modèle à l'adhérence, *Modélisation mathématique et numérique des problèmes avec frottement*, Problèmes non linéaires appliqués (1999), support de cours INRIA, 105–122.

- [121] M. Raous, P. Chabrand & F. Lebon, Numerical methods for frictional contact problems and applications, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **7** (1988), 111–128.
- [122] Y. Renard, A uniqueness criterion for the Signorini problem with coulomb friction, *SIAM J. Math. Anal.*, **38**, 2012, 452–467.
- [123] Y. Renard, Generalized Newton’s methods for the approximation and resolution of frictional contact problems in elasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **256** (2013), 38–55.
- [124] Y. Renard, Méthode numérique et problèmes d’unicité dans un cadre élastodynamique avec contact unilatéral et frottement, *Modélisation mathématique et numérique des problèmes avec frottement*, Problèmes non linéaires appliqués (1999), support de cours INRIA, 123–138.
- [125] Y. Renard, Singular perturbation of a non-monotonous dry friction problem, Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 1, Mathématique 1998, vol. **326**, 131–136.
- [126] N. Renon, P. Montmitonnet & P. Laborde, *Numerical formulation for solving soil/tool interaction problem involving large deformation*, Engineering Computations, Vol. 22 Iss 1 pp. 87 - 109 (2005).
- [127] M. Renouf & P. Alart, Conjugate gradient type algorithms for frictional multi-contact problems : applications to granular materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194** (2005), 18–20.
- [128] T. D. Sachdeva & C. V. Ramakrishnan, A finite element solution for the two-dimensional elastic contact problems with friction. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **17** (1981), 1257–1271.
- [129] C.H. Scholz, *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*, Cambridge University Press, 1990.
- [130] J.C. Simo & T.A. Laursen. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Comput. & Structures* , **42**(1992).
- [131] M. Shillor, M. Sofonea & J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasi-static Contact*, Lecture Notes in Physics **655**, Springer, Berlin Heidelberg, 2004.
- [132] A. Signorini, Sopra a une questioni di elastostatica, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.

- [133] J. Simo & N. Tarnow, The discrete energy-momentum method. part I : Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* **43** (1992), 757–793.
- [134] M. Sofonea, D. Danan & C. Zheng, Primal and dual variational formulation of a frictional contact problem, *Mediterranean Journal of Mathematics*, MJOM-D-14-00344, (2014), 857–872.
- [135] M. Sofonea, W. Han & M. Barboteu, Analysis of a viscoelastic contact problem with multivalued normal compliance and unilateral constraint, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **264** (2013), 12–22.
- [136] M. Sofonea & A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series **398**, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [137] M. Sofonea & A. Matei, History-dependent quasivariational inequalities arising in Contact Mechanics, *European Journal of Applied Mathematics* **22** (2011), 471–491.
- [138] M. Sofonea, N. Renon & M. Shillor *Stress formulation for frictionless contact of an elastic-perfectly-plastic body*, *Applicable Analysis* **83** (11) :1157-1170 (2004).
- [139] R. Temam, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, vol. 2 of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [140] H. Tresca, *Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions*. C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 59, 754., 1864.
- [141] M. A. Tzaferopoulos, E. S. Mistakidis, C. D. Bisbos, & P. D. Panagiotopoulos, Comparison of two methods for the solution of a class of nonconvex energy problems using convex minimization algorithms, *Computers & Structures* **57** (1995), 959–971.
- [142] E. A. Wilson & B. Parsons, Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacement. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **2** (1970), 387–395.
- [143] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*, Wiley, Chichester, 2002.
- [144] S. Zhang & J. Zhu, A projection iterative algorithm boundary element method for the Signorini Problem, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **37** (2013), 176-181.

Les phénomènes de contact entre les corps, déformables ou non, sont omniprésents dans la vie courante. Leurs modélisations requièrent des outils mathématiques faisant appel à des systèmes d'équations aux dérivées partielles incluant des conditions aux limites non triviales pour décrire le contact. Si les aspects physiques de la mécanique du contact sont connus depuis longtemps, la théorie mathématique qui lui est dédiée reste relativement récente laissant ainsi place à de nombreux problèmes à investiguer. Ce travail porte sur la modélisation, l'analyse et la simulation numérique de tels problèmes. Il se situe à mi-chemin entre la mécanique du contact et les aspects mathématiques inhérents au type de problème qui en découle. L'objectif est ici d'étudier certaines catégories de problèmes faisant intervenir des conditions originales de contact (avec et sans frottement) à la fois d'un point de vue mathématique et numérique, afin d'apporter une contribution à la théorie mathématique, puis de mettre en avant quelques méthodes numériques adaptées à leur résolution dans un cadre spécifique.

**Mots clés:** Contraintes unilatérales, Compliance normale, Réponse normale instantanée, Loi de frottement non monotone, Elastodynamique non linéaire, Hyperélasticité, Matériau viscoélastique, Opérateur de mémoire, Solution faible, Méthode des éléments finis, Estimations de l'erreur, Active set, Lagrangien augmenté, Simulations numérique, Schémas d'intégration temporelle, Conservation de l'énergie.

Contact phenomena between bodies, whether they are deformable or not, abound in everyday life. Their modellings require mathematical tools using systems of partial differential equations and involving complex boundary conditions, in order to describe the contact. While the physical aspects of such phenomena have been known for a long time, the mathematical theory remains relatively recent which leaves room for numerous problems. This work focuses on the modelling, the analysis and the numerical simulations of such problems. It is located halfway between contact mechanics and the mathematical aspects inherent to the mechanical questions involved. Our aim is to study several groups of problems that include original contact conditions (with or without friction), both from a mathematical and numerical point of view, in order to contribute to the theory, and also to highlight several numerical methods used to solve specific contact problems.

**Keywords:** Unilateral constraint, Normal compliance, Normal damped response, Nonmonotone friction law, Nonlinear elastodynamics, Hyperelasticity, Viscoelastic material, History-dependent operator, Weak solution, Finite element method, Error estimates, Active set, Augmented Lagrangian, Numerical simulations, Time integration schemes, Energy-conserving algorithms.